$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{c_n}$

Bsp. mit Konvergenzradien von Potenzreihen:

→ $\exp(x) = \sum \frac{x^k}{k!}$ kgt. für alle $x \in \mathbb{R}$ $\rightsquigarrow \limsup \underbrace{\sqrt[k]{\frac{1}{k!}}}_{\to 0} = 0 \Rightarrow R = \infty$

→ $f(x) = \sum k!\, x^k$ kgt. für $x = 0$ $\rightsquigarrow \limsup \sqrt[k]{k!} = \infty \Rightarrow R = 0$

→ $\frac{1}{1-x} = \sum x^k$ kgt. für $|x| < 1$ $\rightsquigarrow R = 1$

$\sum \frac{x^k}{k^2}$ kgt. für $|x| < 1$ $\rightsquigarrow \limsup \sqrt[k]{\frac{1}{k^2}} = 1 \Rightarrow R = 1$

$e^{\boxed{\frac{\log k}{k}}} = \left(e^{\log k}\right)^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{k} \to 1$ $\qquad \sqrt[k]{\frac{1}{k^2}} = \frac{1}{\left(\sqrt[k]{k}\right)^2}$

$$T_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k$$

$$R_n f(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t) \cdot (x-t)^n \, dt \overset{MWS}{=} \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\eta) \cdot \underbrace{\int_a^x (x-t)^n \, dt}_{\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}}$$

- $f(x) = \sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} x^k$ für $|x| < 1$

mit Taylorsatz

$$\sqrt{2} = \sqrt{\frac{49}{49} \cdot \frac{100}{50}} = \frac{10}{7} \sqrt{\frac{49}{50}} = \frac{10}{7} \sqrt{1 - \frac{2}{100}} \approx \frac{10}{7} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{2}{2 \cdot 100} - \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{100^2}\right)}_{= 0{,}98995}$$

## Bestimmen der Konvergenzradien:

1) $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{b^{k^2}} x^k$, $b > 1$ $\rightsquigarrow R = \infty$

2) $f(x) = \sum k^5 5^k x^k$ $\longrightarrow R = \frac{1}{5}$

3) $f(x) = \sum \left(\frac{k+1}{k}\right)^{k^2} x^k$ $\rightsquigarrow R = \frac{1}{e}$

$\longrightarrow \sqrt[k]{\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k^2}} = \left(1+\frac{1}{k}\right)^k \xrightarrow[k\to\infty]{} e$

---

Vor.: $f: V \to V$ Endo, $v$ ist EV zum EW $\lambda$
$w$ " " " " $\mu$, $\mu \neq \lambda$

Beh.: $v, w$ sind lin. unabh.

Bew.: Seien $a, b \in K$ mit $av + bw = 0$.

Dann: • $\overset{f \text{ anw.}}{\rightsquigarrow}$ $a \underbrace{f(v)}_{\lambda v} + b \underbrace{f(w)}_{\mu w} = 0 \to \underline{\underline{a\lambda v}} + b\mu w = 0$

• $\overset{\text{mal } \lambda}{\rightsquigarrow}$ $\underline{\underline{a\lambda v}} + b\lambda w = 0$

Somit: $b \underbrace{(\mu - \lambda)}_{\neq 0} w = 0 \Rightarrow b = 0$
$\Rightarrow a = 0$ ✓

$\square$