Lösungen zu den Repetitoriumsaufgaben Analysis 1

(Teile 7+8)

Aufgabe 7.1

Berechnung der Riemann-Integrale:

a) $$\int_e^{e^2} \frac{\log x}{x}\,dx = \int_e^{e^2} \frac{1}{x}\cdot \log x\,dx \underset{\left[\text{Subst. } u=\log x \rightsquigarrow \frac{du}{dx}=\frac{1}{x}\right]}{=} \int_1^2 u\,du = \frac{1}{2}u^2\Big|_1^2 = 2-\frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$$

b) $$\int_0^1 3^{\sqrt{2x+1}}\,dx \underset{\left[y=\sqrt{2x+1},\ 2x+1=y^2 \rightsquigarrow \frac{dx}{dy}=y\right]}{=} \int_1^{\sqrt{3}} y\,3^y\,dy \underset{\left[u=y,\ v'=3^y;\ u'=1,\ v=3^y\cdot(\log 3)^{-1}\right]}{=} 3^y\cdot\frac{y}{\log 3}\Big|_1^{\sqrt{3}} - \underbrace{\int_1^{\sqrt{3}} 3^y\frac{dy}{\log 3}}_{=\frac{3^y}{(\log 3)^2}\Big|_1^{\sqrt{3}}}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{\log 3}\left(3^{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3} - 3 - \frac{3^{\sqrt{3}}}{\log 3} + \frac{3}{\log 3}\right)}}.$$

c) $$\int_0^1 x\log(x+3)\,dx = \frac{1}{2}x^2\log(x+3)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2-9+9}{x+3}\,dx$$

$$\left[u'=x,\ v=\log(x+3);\ u=\frac{1}{2}x^2,\ v'=\frac{1}{x+3}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\log 2^2 - \frac{1}{2}\int_0^1 (x-3)\,dx - \frac{9}{2}\int_0^1 \frac{1}{x+3}\,dx$$

$$= \log 2 - \frac{1}{4}(x-3)^2\Big|_0^1 - \frac{9}{2}\log(x+3)\Big|_0^1$$

$$= \log 2 - 1 + \frac{9}{4} - \frac{9}{2}\log 2^2 + \frac{9}{2}\log 3 = \underline{\underline{\frac{5}{4} - 8\log 2 + \frac{9}{2}\log 3}}.$$

d) $$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}.$$

Bew.: Sei $x = \frac{\pi}{2}-y$, dann ist $$I := \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}\,dx}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos y}\,dy}{\sqrt{\cos y}+\sqrt{\sin y}}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}\,dx}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}},$$ also $$I + I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}\,dx}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}} + \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}\,dx}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx = \int_0^{\pi/2} dx = x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2},$$

also $2I = \frac{\pi}{2}$, d.h. $\underline{\underline{I = \frac{\pi}{4}}}$. □

Aufgabe 7.2

Beh.: Die Funktion $f: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^n \log x$, $n \in \mathbb{Z}$,

hat für $n = -1$ die Stammfunktion $\frac{1}{2}(\log x)^2 + C$, und
hat für $n \neq -1$ die Stammfunktion $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\log x - \frac{1}{n+1}\right) + C$.

Bew.: 1. Für $n = -1$ so vorgehen wie in 7.1.a):

$$\int x^{-1} \log x \, dx = \int u \, du = \frac{1}{2} u^2 + C = \frac{1}{2}(\log x)^2 + C.$$

2. Für $n \neq -1$ zeigt partielle Integration mit $u = \log x$, $v' = x^n \Leftrightarrow u' = \frac{1}{x}$, $v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$:

$$\int x^n \log x = \log x \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} dx = \log x \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} - \int \frac{x^n}{n+1} dx$$
$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \log x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C. \qquad \square$$

Aufgabe 7.3

Vor.: $u, v: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beide n-mal stetig diff'bar auf $[a, b]$.

Beh.:
$$\int_a^b u(x) v^{(n)}(x) dx = u v^{(n-1)}\Big|_a^b - u' v^{(n-2)}\Big|_a^b + u'' v^{(n-3)}\Big|_a^b - + \dots$$
$$+ (-1)^n \int_a^b u^{(n)}(x) v(x) dx$$

Bem.: Die Formel verallgemeinert die partielle Integration.

Bew.: Durch vollständige Induktion nach n.

Induktionsanfang: $n = 1$: Formel lautet $\int_a^b u(x) v'(x) dx = u(x) v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx$, das ist genau die Formel der partiellen Integration. ✓

Induktionsschritt: $n \rightsquigarrow n+1$: Einmal partiell integrieren gibt:

auf letzteres $\int$ die Ind.vor. anwenden + einsetzen

$$\int_a^b u(x) v^{(n+1)}(x) dx = u(x) v^{(n)}\Big|_a^b - \int_a^b u'(x) v^{(n)}(x) dx$$
$$= u v^{(n+1-1)}\Big|_a^b - \Big(u' \underbrace{v^{(n-1)}}_{=(n+1-2)}\Big|_a^b + u'' \underbrace{v^{(n-2)}}_{=(n+1-3)}\Big|_a^b - \dots + (-1)^n \int_a^b u^{(n+1)}(x) v(x) dx \Big)$$

$=$ r.S. für $n+1$. ✓ $\square$

Nachtrag zu 7.3: (Anwendung der verallg. partiellen $\int$)

$$\int_0^{\pi} x^4 \sin x \, dx = -x^4 \cos x \Big|_0^{\pi} + 4x^3 \sin x \Big|_0^{\pi} - 12x^2 \cos x \Big|_0^{\pi}$$

$\leadsto u = x^4,\ v^{(m)} = \sin x$

$$+ 24 x \sin x \Big|_0^{\pi} - 24 \cos x \Big|_0^{\pi}$$

$$= \pi^4 - 12\pi^2 + 24 + 24 = \underline{\underline{\pi^4 - 12\pi^2 + 48}}$$

Aufgabe 7.4 [MWS der $\int$]

a) Beh.: $0 \leq \int_0^1 x^{39} \sin^8 x \, dx \leq \frac{1}{40}$.

Bew.: "≥ 0" klar, da Integrand ≥ 0 auf $[0,1]$,

"$\leq \frac{1}{40}$": $\int = \sin^8 \xi \int_0^1 x^{39} dx$ für $\xi \in [0,1]$ nach dem MWS der $\int$-Rechnung

$$\leq \frac{x^{40}}{40}\Big|_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{40}}}. \quad ✓ \qquad \Box$$

b) Beh.: $\frac{8}{15\sqrt{5}} \leq \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^5 x}{\sqrt{1+x^2}} dx \leq \frac{8}{15}$

Bew.: Haben $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^5 x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} \int_0^{\pi/2} \cos^5 x \, dx$

für ein $\xi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ nach dem MWS der $\int$-Rechnung.

Es ist

$$\int_0^{\pi/2} \cos^5 x \, dx \underset{\uparrow}{=} \left(\frac{5}{8}\sin x + \frac{5}{48}\sin 3x + \frac{1}{80}\sin 5x\right) = \frac{5}{8} - \frac{5}{48} + \frac{1}{80} = \frac{8}{15},$$

Wolfram Online-Integrator...

da $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$, $\sin\frac{5\pi}{2} = 1$.

Wegen $\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$ für $\xi \leq \frac{\pi}{2} \leq 2$, sowie $\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} \leq 1$ für $\xi \geq 0$

folgt die behauptete Abschätzung. $\Box$

Aufgabe 8.1

Auf welchen $G \subseteq \mathbb{R}$ konvergieren die Reihen gleichmäßig?

Im Fall von Potenzreihen auf allen (kompakten) Teilmengen $[a,b] = G$ innerhalb des Konvergenzintervalls, welches wir bestimmen, (vgl. Satz 12.10)

also: b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{3/2}}$ auf $[a,b] \subseteq (-1,1)$, da $\sqrt[n]{n^{3/2}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$ auf $[a,b] \subseteq (-1,1)$, da $\sqrt[n]{n^3} \xrightarrow{n\to\infty} 1$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \cdot \frac{y^n}{(3n+1)}$, $y = x-1$, da $\sqrt[n]{2^n(3n+1)} = 2 \cdot \sqrt[n]{3n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 2$

und $-2 < y = x-1 < 2 \iff -1 < x < 3$,

also liegt glm. Kgz. auf $[a,b] \subseteq (-1,3)$ vor

f) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 y^n$, $y = \frac{1-x}{1+x}$, da $\sqrt[n]{n^2} \to 1$ und

$$-1 < y = \frac{1-x}{1+x} < 1 \iff \begin{cases} -1-x < 1-x < 1+x, & x > -1 \\ \underbrace{-1-x > 1-x}_{\text{↯}} > 1+x, & x < -1 \end{cases}$$

$\iff x > 0$,

also liegt hier glm. Kgz. auf $[a,b] \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ vor.

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} y^n$, $y = \frac{1}{1+x^2}$, da $\sqrt[n]{\frac{1}{n}} \to 1$ und

$$-1 < y = \frac{1}{1+x^2} < 1 \underset{(1+x^2>0)}{\iff} \underset{\text{ok}}{-1-x^2 <} \underbrace{1 < 1+x^2}_{\text{ok für } x \neq 0}$$

$\rightsquigarrow$ Kgz. der Reihe auf jedem $x \neq 0$, also glm. Kgz. auf jedem IV $[a,b]$ mit $0 \notin [a,b]$.

Die anderen Reihen der Aufgabe sind keine Potenzreihen und auch nicht per Substitution darauf zurückführbar, müssen also anders behandelt werden.

Wir benutzen dafür das Weierstraßsche Konvergenzkriterium (Satz 12.9).

Zu a): $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^4}$, hier haben wir glm. Kgz. für <u>alle</u> $x \in \mathbb{R}$ und $N \geq 1$:

Es ist $$\left| \sum_{n=1}^{N} \frac{\cos nx}{n^4} \right| \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{|\cos nx|}{n^4} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|\cos nx\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{R})}}{n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} < \infty,$$

Sup-Norm auf $\mathbb{R}$, d.h. $\|\cos nx\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\cos nx| = 1$

nach dem Konvergenzkriterium von Weierstraß liegt also glm. Kgz. auf $\mathbb{R}$ vor.

Zu c): $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$, ebenso wie in a) ist für <u>alle</u> $x \in \mathbb{R}$ und $N \geq 1$:

$$\left| \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2+x^2} \right| \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2+x^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left\| \frac{1}{n^2+x^2} \right\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{R})}}_{= \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{n^2+x^2} \right| = \frac{1}{n^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

also Glm. Kgz. auf $\mathbb{R}$.

Zu h): $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n^2-n+1}$, für $x > 0$ liegt sicher Divergenz vor, da dann $\frac{e^{nx}}{n^2-n+1}$ keine Nullfolge ist.

Es gilt:

$$(N \geq 1) \quad \left| \sum_{n=1}^{N} \frac{e^{nx}}{n^2-n+1} \right| \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{\|e^{nx}\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_{<0})}}{n^2-n+1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-n+1} \leq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

da $n^2 - n + 1 \geq \frac{n^2}{2} \Leftrightarrow \frac{n^2}{2} \geq n - 1 \Leftrightarrow n^2 \geq 2n - 1$
$\Leftrightarrow (n-1)^2 \geq 0$ ✓ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Somit liegt (wieder nach Weierstraß) glm. Kgz. für $x \in \mathbb{R}_{<0}$ vor.

$\square$

Aufgabe 8.2

(a) Vor.: $f_n : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$.

Beh.: (f_n) kgt. glm. auf $\mathbb{R}_{>0}$, aber nicht $(\frac{1}{n} f_n)$ bzw. (f_n^2).

Bew.: • Z.z.: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 \ \forall n > N_0 \ \forall x > 0 : |f_n(x) - x| < \varepsilon$,

insb.: die Grenzfunktion ist $f(x) = x$.

⌈ Dazu sei $\varepsilon > 0$ und $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $N_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Sei $n \geq N_0$ beliebig.

Dann ist $|f_n(x) - x| = |x + \frac{1}{n} - x| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_0} < \varepsilon$. ✓ ⌋

• Z.z.: $\exists \varepsilon > 0 \ \forall N_0 \ \exists n \geq N_0 \ \exists x > 0 : |\frac{1}{n} f_n(x) - 0| > \varepsilon$

(die punktweise Grenzfunktion ist: $f(x) = 0$, da $\frac{1}{n} f_n(x) = \frac{x}{n} + \frac{1}{n^2} \to 0$)

⌈ Betr. $\varepsilon := 1$, $N_0 \in \mathbb{N}$ bel. und $n := N_0$. Betr. auch $x := N_0 > 0$.

Dann ist $|\frac{1}{n} f_n(x)| = |\frac{x}{n} + \frac{1}{n^2}| = |\frac{N_0}{N_0} + \frac{1}{N_0^2}| > 1 = \varepsilon$. ✓ ⌋

• Z.z.: $\exists \varepsilon > 0 \ \forall N_0 \ \exists n \geq N_0 \ \exists x > 0 : |f_n^2(x) - x^2| > \varepsilon$

(die punktweise Grenzfunktion ist: $f(x) = x^2$, da $f_n^2(x) = x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \to \infty} x^2$)

⌈ Betr. $\varepsilon := 2$, $N_0 \in \mathbb{N}$ bel. und $n := N_0$, sowie $x := N_0$

Dann ist $|f_n^2(x) - x^2| = |\frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2}| = |\frac{2N_0}{N_0} + \frac{1}{N_0^2}| > 2$. ✓ ⌋

□

(b) Beh.: Funktionenreihe $x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}$ kgt. glm. auf allen $[a,b]$, $\underline{\underline{0<a<b}}$.

Bew.: Mit $\underset{(>0)}{y := \frac{1}{1+x^2}}$ ist die Reihe $= (\frac{1}{y} - 1) \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} y^n}_{= \frac{1}{1-y} \text{ für } 0<y<1}$, (geom. Σ)

d.h. $= (\frac{1}{y} - 1) \cdot \frac{1}{1-y} = \frac{1-y}{y(1-y)} = \frac{1}{y}$, $y \in (0,1)$

Auf jedem Intervall $[u,v]$, $0<u<v<1$, liegt glm. Kgz. der Reihe in y vor (gegen die Grenzfunktion $g(y) = \frac{1}{y}$).

Wieder in x ausgedrückt: $f(x) = 1 + x^2$, und glm. Kgz. liegt vor auf $[a,b] = [\frac{1}{v} - 1, \frac{1}{u} - 1]$ für $0<u<v<1$, also wenn $0<a<b$ ist.

□

Aufgabe 8.3

Vor.: $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$, Beh.: $\int_0^{\pi} f(x)\,dx = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$.

Bew.: Die Reihe konvergiert gleichmäßig auf $x \in \mathbb{R}$, denn für $N \geq 1$ ist $\left|\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(nx)}{n^3}\right| \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{\|\sin(nx)\|_{C_0(\mathbb{R})}}{n^3} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \infty$ (Weierstraß-Kriterium).

Somit können Integration- und Reihenbildung vertauscht werden wie folgt: (vgl. Satz 12.5)

$$\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}\,dx \overset{\downarrow}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \int_0^{\pi} \sin(nx)\,dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}\left(-\frac{1}{n}\cdot\cos(nx)\right)\Big|_0^{\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}\Big(-\underbrace{\cos(n\pi)}_{=\begin{cases}1, & n \text{ ger.}\\ -1, & n \text{ unger.}\end{cases}} + \underbrace{\cos 0}_{=1}\Big)$$

$$= \sum_{\substack{n=1\\ n \text{ unger.}}}^{\infty} \frac{2}{n^4} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}. \qquad \square$$

Der markierte Zwischenschritt ausführlich:

$$\int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{\pi} \lim_{N\to\infty} \underbrace{\sum_{n=1}^{N} f_n(x)}_{=:F_N(x)}\,dx \underset{\substack{\uparrow\\ \text{wegen}\\ \text{Satz 12.5}}}{=} \lim_{N\to\infty} \int_0^{\pi} \underbrace{F_N(x)}_{=\sum_{n=1}^{N} f_n(x)}\,dx$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Linearität des Integrals}}}{=} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_0^{\pi} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} f_n(x)\,dx.$$

Aufgabe 8.4

Beh.: $\int_0^1 x^{-x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}$.

Bew.: Es gilt

$$\text{l.S.} = \int_0^1 e^{\overbrace{-x\log x}^{\geq 0}}\,dx = \int_0^1 \overbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-1)^n x^n (\log x)^n}^{\text{exp-Reihe}}\,dx$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{wie in 8.3,}}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 x^n \log^n\!\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

wegen Glm. Kgz. der exp-Reihe für $x > 0$, folgt aus Satz 7.12 (Restgliedabsch. von exp)

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 e^{-y \cdot \frac{n}{n+1}} \cdot \left(\frac{y}{n+1}\right)^n \cdot \frac{(-1)}{(n+1)} e^{-\frac{y}{n+1}} \, dy$$

$\left(\text{Subst.: } \boxed{x^{n+1} = e^{-y}} \rightsquigarrow \frac{dx}{dy} = \frac{(-1)}{n+1} \cdot e^{-y/(n+1)}, \text{ da } x = e^{\frac{-y}{n+1}} \right)$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \cdot y^n \cdot e^{-y\left(\frac{n}{n+1} + \frac{1}{n+1}\right)} \, dy$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \underbrace{\int_0^{\infty} y^n \cdot e^{-y} \, dy}$$

allg. partielle Integration, Aufgabe 7.3

$$= \underbrace{-n y^{n-1} \cdot e^{-y} \Big|_0^{\infty}}_{=0} + \underbrace{n(n-1) y^{n-2} e^{-y} \Big|_0^{\infty}}_{=0} - \dots + n! \int_0^{\infty} e^{-y} \, dy = \underline{\underline{n!}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}. \qquad \Box$$

Bemerkung: Hier ist $\int_0^{\infty} f(y)\,dy = \lim_{N \to \infty} \int_0^N f(y)\,dy$ gemeint

"uneigentliches Integral"