Lösungen zu den Repetitoriumsaufgaben Analysis 1

(Teile 5+6)

Aufgabe 5.1

f stetig in $a \in D$ $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D, |x-a| < \delta : |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall (x_n),\ x_n \xrightarrow{n\to\infty} a : \ f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(a)$

(a) Vor.: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$

Beh.: f stetig in 0.

Bew.: (mit ε-δ-Kriterium)

z.z.: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}, |x| < \delta : |x^2| < \varepsilon$

Die zu erfüllende Ungl. $|x^2| < \varepsilon$ bzw. $|x| < \sqrt{\varepsilon}$.

Damit ist die z.z. Beh. mit $\delta := \sqrt{\varepsilon}$ erfüllt. $\square$

(b) Vor.: $f: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{x}$

Beh.: f ist stetig in 1.

Bew.: (mit Folgenkrit.) z.z.: $\forall x_n \to 1: \ f(x_n) \to f(1) = 1$.

Sei (x_n) eine Folge mit $x_n \to 1$. Dann kgt. $\frac{1}{x_n}$ gegen $\frac{1}{1} = 1$ wegen der Grenzwertregel für Quotienten. $\square$

(c) Vor.: $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{x}$

Beh.: f ist nicht stetig fortsetzbar in $x=0$, d.h.

$\forall A \in \mathbb{R}: \ \tilde{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) = \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ A, & x = 0 \end{cases}$ ist unstetig in $x=0$.

Bew.: • (mit ε-δ-Krit.):

z.z.: $\forall A \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon_0 > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}: |x| < \delta \wedge \left|\frac{1}{x} - A\right| \geq \varepsilon_0$.

⌈ Zu $A \in \mathbb{R}$ setze $\varepsilon_0 := 1$. Sei $\delta > 0$. Seien $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{\delta} < n_1$ und $n_2 > |A| + \varepsilon_0$. Dann setze $n := \max\{n_1, n_2\}$ und $x := \frac{1}{n}$. Dann gilt $|x| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_1} < \delta$

und $\left|\frac{1}{x} - A\right| = |n - A| \geq |n| - |A| > n_2 - |A| > |A| + \varepsilon_0 - |A| = \varepsilon_0$. ⌋

• (mit Folgenkrit.): z.z.: $\forall A \in \mathbb{R}\ \exists (x_n),\ x_n \to 0$, die $x_n \neq 0$, mit $f(x_n) \not\to A$.

⌈ Wähle $x_n := \frac{1}{n} \to 0$, dann ist $f(x_n) = n$ divergent. ⌋ $\square$

Aufgabe 5.2

Für welche Werte des Definitionsbereiches sind die Fktn. stetig?

(a) $f(x) := \frac{x}{x^2-1}$ hat Def.bereich $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, f ist in allen $a \in D$ stetig. (da aus stetigen Fktn. zusammengesetzt)

(b) $f(x) := \frac{1+\cos x}{3+\sin x}$ hat Def.bereich $D = \mathbb{R}$ (Nenner wird nie $\neq 0$), ist in allen $a \in D$ stetig (da aus stetigen Funktionen zusammengesetzt).

(c) $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n$ ist geom. Reihe, kgt. genau für $x \in (-2,2) = D$.

Auf D gilt $f(x) = \frac{1}{1-\frac{x}{2}} \underbrace{- 1}_{\text{(für } n=0\text{-Term)}} = \frac{2}{2-x} - \frac{2-x}{2-x} = \frac{x}{2-x}$, dort ist f stetig.

(d) $f(x) := 10^{-1/(x-3)^2}$ hat Def.bereich $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, dort stetig (da aus stetigen...)

(e) $f(x) := \begin{cases} 10^{-1/(x-3)^2}, & x \neq 3, \\ 0, & x = 3, \end{cases}$ ist (wie in (d)) für $x \neq 3$ stetig, und stetig in $x = 3$, da gilt:

$$10^{-\frac{1}{(x-3)^2}} = \exp\Big(-\underbrace{\frac{\log 10}{(x-3)^2}}_{\substack{\to \infty \\ \text{für } x \to 3}}\Big) \xrightarrow{x \to \infty} 0 = f(0) \checkmark$$

(f) $f(x) := \frac{x-|x|}{x}$ hat Def.bereich $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, stetig in $x \neq 0$.

(g) $f(x) := \begin{cases} \frac{x-|x|}{x}, & x < 0, \\ 2, & x = 0, \end{cases}$ hat Def.bereich $D = \mathbb{R}$, stetig in $x < 0$, und stetig in $x = 0$, denn für $x < 0$ gilt:

$$\frac{x-|x|}{x} = \frac{x-(-x)}{x} = \frac{2x}{x} = 2 \xrightarrow[(x<0)]{x \to 0} 2 = f(0) \checkmark$$

(h) $f(x) := \frac{x}{\sin x}$ hat Def.bereich $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$, ist in $x \in D$ stetig.

(i) $f(x) := \begin{cases} \frac{x}{\sin x}, & x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ hat Def.bereich $D = (\mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}) \cup \{0\}$, stetig für $x \neq 0$, und auch für $x = 0$ da $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$, da $\frac{\cos x}{1} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$ (de l'H.) $\square$

Aufgabe 5.3

Vor.: $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}$, $\frac{f}{g}$ und g stetig in a.
Beh.: f stetig in a.
Bew.: Sind $\frac{f}{g}, g$ stetig in a, so auch das Produkt $\frac{f}{g}\cdot g = f$ laut Stetigkeitssatz. Dessen Beweis beruht auf dem GWsatz.
Direkter Beweis damit:
Ist (x_n) eine Folge mit $x_n\to a$, so ist $\frac{f}{g}(x_n)\to\frac{f}{g}(a)=\frac{f(a)}{g(a)}$ sowie $g(x_n)\to g(a)$ wegen der Stetigkeit von $\frac{f}{g}$ und g in a.
Dann ist (wegen besagtem GWsatz) auch $\underbrace{\frac{f}{g}(x_n)\cdot g(x_n)}_{=f(x_n)}\to\frac{f(a)}{g(a)}\cdot g(a)=f(a)$, also ist f stetig in a. $\square$

Aufgabe 5.4 $\left(\cosh(x) := \frac{e^x+e^{-x}}{2} \text{ für } x\in\mathbb{R}\right)$

Vor.: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) := \cos(x)\cdot\cosh(x)+1$.

1. Beh.: f hat ∞ viele Nullstellen.

Bew.: Die Nullstellen müssen nicht explizit konstruiert werden, es genügt, deren Existenz zu zeigen. f ist stetig, zwischen zwei Stellen mit Vorzeichenwechsel befindet sich wegen dem ZWS eine Nullstelle.
Nun ist $f(x)=\underbrace{\frac{e^x+e^{-x}}{2}}_{\text{wird groß für } x\to\infty}\cdot\underbrace{\cos x}_{\text{viele VZ-wechsel}}+1$, $\quad \cos x = \begin{cases} 1, & x\in\{2k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\} \\ -1, & x\in\{\pi+2k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\}\end{cases}$

Für alle $k\in\mathbb{N}$ genügend groß ist dann $f(2k\pi)>0$ und $f(\pi+2k\pi)<0$, also ex. eine Nullstelle zwischen $2k\pi$ und $2k\pi+\pi$.
Damit ex. auch ∞ viele Nullstellen. $\square$

2. Beh.: Für x groß liegen die Nullstellen nahe $x_k := \frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Bew.: Es hat $f(x_k+\Delta)=\underbrace{\tfrac{1}{2}\left(e^{x_k+\Delta}+e^{-x_k-\Delta}\right)}_{\text{groß für großes } k}\cdot\underbrace{\cos(x_k+\Delta)}_{=\cos x_k\cos\Delta-\sin x_k\sin\Delta=-\sin x_k\sin\Delta}+1$ verschiedenes VZ für $\Delta>0$ und $\Delta<0$, sofern $|\Delta|$ klein, also $|\sin\Delta|$ klein. $\square$

Aufgabe 6.1

Vor.: $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ stetig diff'bar.

(a) Beh.: $\forall x \in]a,b[: f'(x) = 0 \Rightarrow f$ konstant (auf $]a,b[$)

Bew.: z.z.: $\exists c > 0 \, \forall x \in]a,b[: f(x) = c$.

Sei $c := f(u)$ für ein $u \in]a,b[$.

Für $x \in]a,b[$ gilt dann laut MWS:

$\exists \, y \in]u,x[$ bzw. $y \in]x,u[$: $f(x) - f(u) = \underbrace{f'(y)}_{=0}(x-u) = 0$,

also gilt $f(x) = f(u) = c$ für alle $x \in]a,b[$,

d.h. f ist konstant. □

(b) Beh.: $\forall x \in]a,b[: f'(x) > 0 \Rightarrow f$ streng monoton steigend (auf $]a,b[$).

Bew.: z.z.: $\forall x,y \in]a,b[, x<y : f(x) < f(y)$.

Dazu seien $x,y \in]a,b[, x<y$. Laut MWS gilt:

$\exists \, u \in]x,y[: f(y) - f(x) = \underbrace{f'(u)}_{>0}\underbrace{(y-x)}_{>0} > 0$, also ist $f(y) > f(x)$.

□

Bem.: Umkehrung in (b) gilt nicht, wie $f(x) := x^3$ zeigt:

f ist streng mon. steigend, aber $f'(0) = 0$.

Beweis, daß f s.m.w. ist: klar für $x,y > 0$ und $x,y < 0$ wegen b).

Für $x < 0 < y$: $f(x) = x^3 < 0 < y^3 = f(y)$ ✓ (und auch falls $x = 0$ oder $y = 0$). □

Aufgabe 6.2

(a) Beh.: $a < b \Rightarrow \frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}$

Bew.: Laut MWS ex. ein $u \in]a,b[$ mit

$\arctan b - \arctan a = \underbrace{\arctan'(u)}_{= \frac{1}{1+u^2}} \cdot (b-a)$, (vgl. Rep-Stunde vor Hauptklausur)

und da $\underbrace{f(u) := \frac{1}{1+u^2} \text{ streng mon. fällt}}_{\left(\text{denn } f'(u) = -\frac{2u}{(1+u^2)^2} < 0 \text{ für alle } u \in \mathbb{R}\right)}$, ist $f(b) < f(u) < f(a)$.

Es folgt die Beh. □

(b) **Beh.:** $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} < \arctan\frac{4}{3} < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}$.

Bew.: Haben $\tan\frac{\pi}{4} = 1$, also $\frac{\pi}{4} = \arctan 1$.

Aus a) folgt: $\underbrace{\frac{1/3}{1+4^2/3^2}}_{= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{16}{9}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{9}{25} = \frac{3}{25}} < \arctan\frac{4}{3} - \underbrace{\arctan 1}_{=\pi/4} < \frac{1/3}{1+1^2} = \frac{1}{6}$

$(b = \frac{4}{3}, a = 1)$

$\square$

Aufgabe 6.3

Vor.: $a < b$ reell

a) **Beh.:** $\exists\, \xi \in\,]a,b[: \frac{\sin b - \sin a}{\cos a - \cos b} = \frac{\cos\xi}{\sin\xi}$.

Bew.: Laut VMWS (vorletzte Ü-Aufg. in Analysis 1) gilt:

$$\exists\, \xi \in\,]a,b[: \frac{\sin b - \sin a}{\cos b - \cos a} = \frac{\cos\xi}{-\sin\xi},$$ die Beh. $\square$

b) Beh.: Für $a=0$, $b=x$ gilt in a): $\xi = \frac{x}{2}$. (Auch für $x<0$?)

Bew.:

Quotient l.S. $= \frac{\sin x - \sin 0}{\cos 0 - \cos x} = \frac{\sin x}{1-\cos x}$, r.S. $= \frac{\cos(\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}$.

Zeigen Gleichheit, d.h. z.z. $\sin(\frac{x}{2})\underbrace{\sin(x)}_{=\sin(2\cdot\frac{x}{2}) = 2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})} = \cos(\frac{x}{2}) - \cos(\frac{x}{2})\cos(x)$

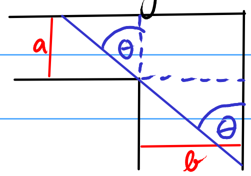
$\iff 2\sin^2(\frac{x}{2}) \overset{?}{=} 1 - \cos(x)$

wobei $\cos(x) = \cos(2\cdot\frac{x}{2}) = \cos^2(\frac{x}{2}) - \sin^2(\frac{x}{2}) = 1 - 2\sin^2(\frac{x}{2})$ ist,

es folgt die Beh., auch für $x<0$: dann $a = x$, $b = 0$ setzen, und Quotient l.S. bleibt gleich. $\square$

Aufgabe 6.4

„Leiteraufgabe": Gesucht ist die Länge der kürzesten Strecke, die die Ecke und die beiden Wände berührt.



In Abhängigkeit des eingetragenen Winkels θ ist diese

$$L(\theta) = \frac{a}{\cos\theta} + \frac{b}{\sin\theta},$$ suchen Extremwert von L.

Ableitung: $$L'(\theta) = \frac{a\sin\theta}{\cos^2\theta} - \frac{b\cos\theta}{\sin^2\theta},$$

Nullstellenbestimmung: suche θ mit $a\sin^3\theta = b\cos^3\theta \Leftrightarrow \tan\theta = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$

$\Leftrightarrow \theta = \arctan\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$

Dann ist $$\frac{1}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}}}{a^{1/3}}, \quad \frac{1}{\sin\theta} = \frac{\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}}}{b^{1/3}},$$

$1+\tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$

$1+\cot^2 = \frac{1}{\sin^2}$

also $$L(\theta) = \underline{\underline{\left(a^{2/3}+b^{2/3}\right)^{3/2}}}.$$

Geometrisch ist klar, daß an dieser Stelle θ ein Minimum vorliegen muß. Dies kann auch analytisch überprüft werden mit

$$L''(\theta) > 0 \text{ für } \theta = \arctan\sqrt[3]{\frac{b}{a}}.$$

$\square$