Lösungen zu den Repetitoriumsaufgaben Analysis 1

(Teile 3+4)

Aufgabe 3.1

Test der Reihen auf Konvergenz (mittels Konvergenzkriterien...)

(a) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{2k+1}\right)^k$: kgt. wegen $\sqrt{\ }$-Krit.: $\sqrt[k]{a_k} = \frac{k}{2k+1} = \frac{1}{2+\frac{1}{k}} \leq \frac{1}{3} < 1$ für alle k

(b) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{k^2}\cdot 2^k$: div., da $a_k = \frac{k!}{k^2}\cdot 2^k = \underbrace{\frac{k\cdot(k-1)}{k^2}}_{\geq\frac{1}{2}\text{ für große }k}\cdot(k-2)!\cdot 2^k$ keine Nullfolge

(c) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k+1)^{k^2}}{k^{k^2}\cdot 2^k}$: div. wegen $\sqrt{\ }$-Krit.: $\sqrt[k]{a_k} = \underbrace{\left(\frac{k+1}{k}\right)^k}_{\to e \text{ für } k\to\infty}\cdot\frac{1}{2} \longrightarrow \frac{e}{2} > 1$

(d) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2^{k+1}}{5\cdot 3^k}$: kgt. wegen $\sqrt{\ }$-Krit.: $\sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\frac{2}{5}}\cdot\left(\frac{2}{3}\right) \leq \frac{1}{2} < 1$ für alle großen k

(e) $\sum_{k=1}^{\infty}\binom{2+k}{k}^{-1/k}$: kgt. wegen $\sqrt{\ }$-Krit.: $\binom{2+k}{k} = \frac{(2+k)!}{2k!} = \frac{(2+k)(1+k)}{2}$,

also $\left(\frac{2}{(2+k)(1+k)}\right)^{1/k^2} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, d.h. Term ist $\leq\frac{1}{2}<1$ für alle großen k.

(f) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\log k}$: div. wegen Cauchy-Verdichtung: Die verdichtete Reihe

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2^k\cdot\log 2^k}\cdot 2^k = \frac{1}{\log 2}\underbrace{\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}}_{\text{harm. }\Sigma}$$ ist divergent.

Aufgabe 3.2

(a) Beh.: alle $a_n > 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+n^2 a_n}$ kgt.

Bew.:
$$\sum_{n=1}^{K}\frac{2^n a_{2^n}}{1+2^{2n}a_{2^n}} = \sum_{n=1}^{K}\frac{2^n}{\frac{1}{a_{2^n}}+2^{2n}} \underset{\frac{1}{a_{2^n}}>0}{\leq} \sum_{n=1}^{K}\frac{2^n}{2^{2n}} = \sum_{n=1}^{K}\frac{1}{2^n} \xrightarrow{K\to\infty} 1 \text{ kgt.},$$

nach dem Cauchy-Verdichtungskrit. konvergiert die Reihe. □

Oder: $0 < \frac{a_n}{1+n^2a_n} = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{a_n}{a_n+\frac{1}{n^2}} < \frac{1}{n^2}$, und $\sum\frac{1}{n^2}$ ist kgt. □

(b) Vor.: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend, die $a_n > 0$.

Beh.: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right)$ kgt. $\iff (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

Bew.: „$\Leftarrow$“: Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1}-a_n)$ konvergent. Da

$$0 \le \frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 = \frac{a_{n+1}-a_n}{a_n} \le \frac{1}{a_1}\left(a_{n+1}-a_n\right),$$

folgt die Kgz. von $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)$.

„$\Rightarrow$“: Sei sonst $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt. Da (a_n) mon. wächst, gilt $\forall m > n$:

$$\sum_{k=n}^{m} \left(\frac{a_{k+1}}{a_k} - 1\right) = \frac{a_{m+1}-a_m}{a_m} + \frac{a_m - a_{m-1}}{a_{m-1}} + \ldots + \frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}$$

$$\ge \frac{1}{a_m} \cdot \sum_{k=n}^{m} (a_{k+1}-a_k) = \frac{1}{a_m}\left(a_{m+1}-a_n\right) \ge 1 - \underline{\frac{a_n}{a_m}}.$$

Zu a_n ex. ein $m>n$ mit $a_m > 2a_n$ wegen Unbeschränktheit, d.h. mit $1-\frac{a_n}{a_m} > \frac{1}{2}$.

Laut Cauchy-Konvergenz-Kriterium folgt die Divergenz der Reihe l.S.G. □

(c) Vor.: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mon. fallend, $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Beh.: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kgt. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+na_n}$ kgt.

Bew. Da $0 \le \frac{a_n}{1+na_n} \le a_n$, folgt dies wg. Majorantenkrit. □

Bem.: Die Rückrichtung gilt auch, ist aber deutlich aufwendiger zu zeigen. Findet jemand einen einfachen Beweis?

Aufgabe 3.3

a) Beh.: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^n$ kgt. genau für $x \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup \{-2\}$.

Bew.: Quotientenkrit.: $\left| \frac{1}{2(n+1)-1} \cdot \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{n+1} \cdot (2n-1) \cdot \left(\frac{x-1}{x+2}\right)^n \right|$ $\quad (x \neq 1, -2)$

$= \left| \frac{2-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} \cdot \frac{x+2}{x-1} \right|$, dessen GW ist $< 1 \iff |x+2| < |x-1|$

$\iff x+2 < |x-1| \wedge -x-2 < |x-1|$

$\iff (x+2 < x-1 \vee x+2 < 1-x) \wedge (-x-2 < x-1 \vee -x-2 < 1-x)$

$\iff (\underbrace{2 < -1}_{f.} \vee \underline{\underline{x < -\frac{1}{2}}}) \wedge (-1 < 2x \vee \underbrace{-2 < 1}_{w.})$

$\iff \underline{\underline{x < -\frac{1}{2}}}$

Für $x = -\frac{1}{2}$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$ konvergent.

Für $x = -2$ ist die Reihe kgt. mit GW 0, für $x = 1$ div. $\square$

b) Beh.: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n-1)}$ kgt. genau für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$

Bew.: Quot.krit. klappt nicht.

Trick: $\frac{1}{(x+n)(x+n-1)} = \frac{1}{x+n-1} - \frac{1}{x+n}$, d.h. die Reihe ist eine Teleskopreihe mit Partialsumme $S_n = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+n}$,

also ist der Reihengrenzwert $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{x}$, sofern $x \neq 0, -1, -2, \dots$ $\square$

Aufgabe 3.4

1. Beh.: $\exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge, $\exists B>0 \,\forall n \in \mathbb{N}: \left|\sum_{k=1}^{n-1}(a_k - a_n)\right| \leq B$: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ div.

Bew.: Bsp.: $a_k = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$. $\square$

2. Beh.: $\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge, $\exists B>0 \,\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{k=1}^{n-1}(a_k - a_n) \leq B$, die (a_n) mon. fallende Nullfolge: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kgt.

Bew.: Für $m \in \mathbb{N}$ bestimme n mit $a_n \leq \frac{1}{2} a_m$. Da

$B \geq a_1 + \dots + a_m - m a_n + (a_{m+1} + \dots + a_n) - (n-m) a_n$

$\geq m(a_m - a_n) \geq \frac{1}{2} m a_m$, folgt $a_1 + \dots + a_m \leq B + m a_m \leq 3B$. $\square$

Aufgabe 4.1

Größter Definitionsbereich für die Funktionsvorschriften: $f: D \to \mathbb{R}$

a) $\sqrt{(-x+3)(2x+4)}$ genau für $(-x+3)(2x+4) > 0 \vee x = 3 \vee x = -2$

$\Leftrightarrow (-x > -3 \wedge 2x > -4) \vee \underbrace{(-x < -3 \wedge 2x < -4)}_{\text{falsch}} \vee x = 3 \vee x = -2$

$\Leftrightarrow -2 < x < 3 \vee x = 3 \vee x = -2$

also: $D = [-2, 3]$.

b) $(x-2)(x^2-4) \rightsquigarrow D = \mathbb{R}$

c) $\sin(3x) \rightsquigarrow D = \mathbb{R}$, d) $\log_{10}\big(\underbrace{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}_{\text{nur def., falls dies } > 0}\big)$

Nun: $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = (x^2-4)(x-3) > 0$

$\Leftrightarrow (x^2 > 4 \wedge x > 3) \vee (x^2 < 4 \wedge x < 3)$

$\Leftrightarrow ((x > 2 \vee x < -2) \wedge x > 3) \vee (-2 < x < 2 \wedge x < 3)$

$\Leftrightarrow x > 3 \vee -2 < x < 2$,

also: $D = (-2, 2) \cup (3, \infty)$. $\square$

Aufgabe 4.2

Vor.: $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, $a \in D$, $\lim_{x \to a} f(x) = B \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Beh.: $\exists \delta > 0 \ \forall x \in D, 0 < |x-a| < \delta: |f(x)| > \frac{1}{2} \cdot |B|$.

Bew.: Da $\lim_{x \to a} f(x) = B$, ex. $\delta > 0$ mit $|f(x) - B| < \frac{1}{2}|B|$

für $x \in D$, $0 < |x-a| < \delta$. Mit $B = B - f(x) + f(x)$ folgt aus der Δ-Unglg.:

$|B| \leq |B - f(x)| + |f(x)| < \frac{1}{2}|B| + |f(x)|$,

also $|f(x)| > \frac{1}{2}|B|$. $\square$

Bem.: $\lim_{x \to a} f(x) = B :\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \forall x \in D, 0 < |x-a| < \delta:$

$|f(x) - B| < \varepsilon$

Aufgabe 4.3

Vor.: $f(x) := \frac{3x+|x|}{7x-5|x|}$

Beh.: a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1}{6}$

c) $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 2$ d) $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = \frac{1}{6}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ex. nicht

Bew.: Es ist für $x \neq 0$:

c): $f(x) = \frac{3+\frac{|x|}{x}}{7-5\frac{|x|}{x}} \xrightarrow{x\to 0+} \frac{3+1}{7-5} = \frac{4}{2} = 2$, d): $f(x) \xrightarrow{x\to 0-} \frac{3-1}{7+5} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$,

e): also ex. kein GW für $x \to 0$, und

für $x > 1$ ist $f(x) = \frac{3+1}{7-5} = 2$, für $x < -1$ ist $f(x) = \frac{3-1}{7+5} = \frac{1}{6}$,

also folgt a), b). $\square$

Aufgabe 4.4

Vor.: $f: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.

(a) Vor.: f auf $(0,1]$ monoton, $\int_0^1 x^a f(x)\,dx$ ex. (d.h. $x^a f(x)$ auf $(0,1]$ int'bar)

Beh.: $\lim\limits_{x\to 0} x^{a+1} f(x) = 0$

Bew.: Ist f nicht mon. steigend, gilt für $0 < x < \frac{1}{2}$:

$$\int_{x/2}^{x} t^a f(t)\,dt \geq f(x) \int_{x/2}^{x} t^a\,dt = x^{a+1} f(x) \cdot \frac{1-(1/2)^{a+1}}{a+1}$$

und $$\int_x^{2x} t^a f(t)\,dt \leq f(x) \int_x^{2x} t^a\,dt = x^{a+1} f(x) \cdot \frac{2^{a+1}-1}{a+1}.$$

Ist $a = -1$, sind die Faktoren hinten

durch $\log 2$ zu ersetzen.

b) Vor.: f auf $\mathbb{R}_{>1}$ monoton, $\int_1^\infty x^a f(x)\,dx := \lim\limits_{k\to\infty} \int_1^k x^a f(x)\,dx$ ex.

Beh.: $\lim\limits_{x\to\infty} x^{a+1} f(x) = 0$

Bew.: Ersetze x durch $\frac{1}{x}$ und gehe vor wie in a).