Repetitorium Analysis 1 – Stoffwiederholung + Vertiefung / Beispiele + Aufgaben

(Teil 10)

§10: Taylorreihen:

Potenzreihen stellen (auf ihrem Kgz.IV) bel. oft diff'bare Funktionen dar.

Frage: Geg. eine Funktion f, die nahe $x=0$ bel. oft diff'bar ist.
Gibt es eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, die nahe x kgt. und deren (Funktions-)werte mit $f(x)$ übereinstimmen?
(Sie ist eindeutig bestimmt wegen Identitätssatz.)

Taylor-Satz / Taylorsche Formel:

Vor.: Sei I ein offenes IV, etwa $I =]b, c[\subseteq \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$,
sei $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$ und $a \in I$

Beh.: Dann gilt

$$f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x) \quad \text{für alle } x \in I,$$

wobei $R_{n+1}(x) := \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt$

das Restglied ist

und $T_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

das n-te Taylorpolynom von f bzgl. a bezeichnet.

Bem.: 1) Für $n=0$ ist die Bed. gerade die Aussage des Hauptsatzes der Diff.+ $\int$-Rg.

2) Man spricht auch von einer Potenzreihenentwicklung in a, $a \in I$ heißt auch Entwicklungsstelle / Entwicklungspunkt, denn $T_n(x)$ wird für $n\to\infty$ zu einer Potenzreihe mit Entwicklungspkt. a

3) Die Potenzreihe $T[f,a](x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ braucht (außer für $x=a$) nicht zu konvergieren. Diese Reihe heißt Taylorreihe von f in a.

4) Für $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$ gilt: $\forall x \in I$:

$$T_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) \iff R_{n+1}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

5) Wenn $T_n(x)$ für $n\to\infty$ konvergiert, muss der GW noch lange nicht $f(x)$ sein: Bsp.: $f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

$\leadsto$ alle $T_n(x)=0$

6) Für eine Potenzreihe

$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ mit Konvergenzradius $r>0$

gilt

$$f \in \mathcal{C}^\infty(]a-r,a+r[) \text{ und } c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \text{ für alle } n=0,1,2,\dots,$$

d.h. die Taylorreihe von f in a ist gleich der Potenzreihe f selbst und konvergiert gegen f.

- (wg. Identitätssatz für Potenzreihen)
- (punktweise und auf abg. Intervallen $\subseteq]a-r,a+r[$ auch gleichmäßig)

7) Ist $f \in C^{n+1}(I)$ und $\forall x \in I : f^{(n+1)}(x) = 0$,
so ist f ein Polynom vom Grad $\leq n$
(nämlich $T_n(x)$ zum Entwicklungspunkt a,
für jeden Punkt a kommt dasselbe Polynom heraus!)

8) Das Restglied $R_{n+1}(x)$ läßt sich auch schreiben als
Lagrange-Restglied in der Form

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}$$

für ein $\eta \in I$ zwischen a und x (wegen MWS der $\int$-Rg).

9) Es ist $R_{n+1}(x) = \varphi(x) \cdot (x-a)^n$ mit $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$.

10) Der Taylorsatz erlaubt eine Approximation

$f(x) \approx T_n(x)$, der Fehler $R_{n+1}(x)$ dieser

Abschätzung ist maximal $|R_{n+1}(x)| \leq |\varphi(x)| \cdot |x-a|^n$,
was für x nahe a oft sehr klein ist.

Die Approximation ist sinnvoll, wenn
$R_{n+1}(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ ist,
d.h. wenn die Taylorreihe auch wirklich
die Funktionswerte approximiert.

$R_{n+1}(x)$ gibt dann die "Güte" der Konvergenz
von $T_n(x)$ gegen $f(x)$ an.

Beispiel:

exp-Funktion: $\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ist eine Potenzreihe in $a=0$, sie stimmt mit ihrer Taylor-Reihe (überall) überein.

[$\exp^{(n)}(0) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ in die Taylorformel einsetzen!]

Die Bem. 8) + 9) besagt, daß die numerische Berechnung von $\exp(x)$ für konkrete x nahe $a=0$ möglich ist durch

$$\exp(x) \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \qquad \text{(z.B. Taschenrechner)},$$

der Fehler $R_{n+1}(x)$ ist abschätzbar durch (Lagrange-Restglied)

$$|R_{n+1}(x)| \le \underbrace{\frac{C(\varepsilon)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0}, \quad \text{wo } C(\varepsilon) := \sup\{|f^{(n+1)}(x)|;\, x \in\,]-\varepsilon, \varepsilon[\}$$

der maximale Wert von $|f^{(n+1)}(x)|$ auf der ε-Umgebung von 0 ist, hier: $C(\varepsilon) = \exp(\varepsilon)$.

- Diese Abschätzung wird genauer, je näher x an $a=0$ liegt: $R_{n+1}(x) \xrightarrow{x\to 0} 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- Sie wird genauer, je mehr Summanden man zur Approximation benutzt: $R_{n+1}(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- Zur numerischen Approximation von $e := \exp(1) \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$:
  Einen Fehler $|R_{n+1}(1)| \le 10^{-6}$ erhält man, da

  $$\underset{\text{(Lagrange)}}{|R_{n+1}(1)| \le} \frac{3}{(n+1)!}, \quad \text{wenn } 3 \cdot 10^6 \le (n+1)!, \text{ d.h. ab } n = 9,$$

  also 10 Summanden.

Die Potenzreihenentwicklung von Funktionen

1) $f(x) = \sin x$, entwickeln in $a=0$:

Es ist $f(0)=0$,
und mit $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$,
$f^{(4)}(x) = \sin x$ usw.,
also $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, $f^{(4)}(0) = 0$ usw.

folgt:

$$T[f,0](x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

(Lagrange-)
Fehler: $|R_{n+1}(x)| \leq \frac{1 \cdot x^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Daher stellt die Taylorreihe wirklich die Funktion $\sin x$ überall dar, es folgt:

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

2) Analog:

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

3) $f(x) = \frac{1}{c-x}$ in $a=0$:

Es ist $f(x) = \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{c}} = \frac{1}{c} \cdot \sum_{a=0}^{\infty} \left(\frac{x}{c}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c^{-k-1} x^k$, für $|x| < c$

4) $f(x) = \log(1+x)$, entwickeln in $a=0$:

Haben:

$f'(x) = (1+x)^{-1}$, $f''(x) = -(1+x)^{-2}$, $f'''(x) = 2\cdot(1+x)^{-3}$, ...,

also $f'(0) = 1$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = 2!$, $f^{(4)}(0) = -3!$, ...,

d.h. $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}\cdot(k-1)!$ und

$$T[f,0](x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k-1}\cdot\frac{(k-1)!}{k!}\, x^k$$

mit Fehler $|R_{n+1}(x)| \leq \frac{\tilde{C}(\varepsilon)}{(n+1)!}\cdot x^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ für $x \in]-1+\varepsilon, 1-\varepsilon[$

mit $\tilde{C}(\varepsilon) := \sup\{\underbrace{|f^{(n+1)}(x)|}_{(\text{div. für } x\to -1)};\ x \in]-1+\varepsilon, 1-\varepsilon[\}$, $\varepsilon > 0$.

Somit: $\forall x \in]-1,1[$:

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\cdot\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \ldots$$

5) $f(x) = \arctan x$, entwickeln in $x=0$:

Die Ableitungen $f^{(k)}(0)$ sukzessive zu berechnen ist umständlich.

Lieber so: $f'(t) = \frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k}$, $t \in]-1,1[$,

also ist $f(x) = \int_0^x f'(t)\,dt \underset{\text{glm. Kgz.}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \underbrace{\int_0^x t^{2k}\,dt}_{=\frac{x^{2k+1}}{2k+1}}$.

Somit: $\forall x \in]-1,1[$: $\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$

6) $f(x) = (1+x)^\alpha$ für $\alpha \in \mathbb{R}$, $a=0$

Ist $\alpha = n \in \mathbb{N}$, gibt die binomische Formel $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ bereits die fertige – endliche – Potenzreihenentw.

Für allg. $\alpha \in \mathbb{R}$ def. man die <u>(verallgemeinerten) Binomialkoeff.</u> $\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$.

Es ist $\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \binom{\alpha}{k}$, man erhält über den Taylor-Satz die <u>binomische Reihe</u>

$$\underline{\forall x \in]-1,1[: \quad (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k},$$

Bsp.: $\alpha = \frac{1}{2}$, dann ist $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{2\cdot 4} x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6} x^3 - \ldots$

Dies kann zur numerischen Berechnung von z.B. $\sqrt{\frac{3}{2}}$ benutzt werden.

7) $f(x) = e^{\sin x}$ in $a = 0$:

Einsetzen einer Potenzreihe in eine andere: Hier können die ersten 3 Summanden bestimmt werden durch:

$$e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{\sin^2 x}{2} + \ldots$$

und $\sin x = x + x^3 \cdot (\ldots)$, $\sin^2 x = x^2 + x^4 \cdot (\ldots)$,

also

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^3 \cdot (\ldots). \quad \text{Hier folgt: } e^{\sin x} \xrightarrow{x \to 0} \underline{\underline{1}}.$$

Grenzwertbestimmung mit Potenzreihen

Statt de l'Hôpital ist diese Methode oft einfacher und auch dann möglich, wenn de l'Hôpital prinzipiell nicht anwendbar ist.

Bsp.: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right) = ?$

Idee: wir entwickeln die Fkt. in eine Potenzreihe in $a=0$:

$$\frac{\cos x}{\sin x} \approx \frac{1-\frac{x^2}{2!}}{x-\frac{x^3}{3!}} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1-x^2/2}{1-x^2/6}, \quad \text{also}$$

$$\frac{1}{x}-\frac{\cos x}{\sin x} \approx \frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cdot\frac{1-x^2/2}{1-x^2/6} = \frac{1}{x}\left(1-\frac{1-x^2/2}{1-x^2/6}\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{1-x^2/6-1+x^2/2}{1-x^2/6}\right)$$

$$= \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)}{1-x^2/6} = \frac{1}{3}\cdot\frac{x}{1-x^2/6} \xrightarrow{x\to 0} \underline{\underline{0}}.$$

Bsp.: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2} = ?$

$$\text{Zähler} = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots-1-x \approx \frac{x^2}{2}+x^3\cdot(\ldots)$$

$$\text{Also: } \frac{e^x-1-x}{x^2} \approx \frac{1}{2}+x\cdot(\ldots) \xrightarrow{x\to 0} \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Kehrwert einer Potenzreihe bilden:

Bsp. $\frac{1}{1+\log(1+x)} = \frac{1}{1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots} \overset{!}{=} c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots$

$$\rightsquigarrow \underline{1} \overset{!}{=} \left(1+x-\tfrac{1}{2}x^2\right)\cdot\left(c_0+c_1x+c_2x^2\right) = \underline{c_0}+\underline{(c_1+c_0)}x+\underline{\left(-\tfrac{c_0}{2}+c_1+c_2\right)}x^2+\ldots$$

$$\rightsquigarrow c_0=1,\quad c_1=-1,\qquad -\tfrac{1}{2}-1+c_2=0 \rightsquigarrow c_2=\tfrac{3}{2},$$

also: $(1+\log(1+x))^{-1} = 1-x+\frac{3}{2}x^2+$ Terme höherer Ordnung