Repetitorium Analysis 1 – Stoffwiederholung + Vertiefung / Beispiele + Aufgaben

(Teile 8 – 9)

§ 8: Funktionenfolgen

Funktionenfolge: $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : K \to \mathbb{C}$, $K \subseteq \mathbb{R}$

Sei $f : K \to \mathbb{C}$.

- **Punktweise Konvergenz:**

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{ptw.}} f \;:\Leftrightarrow\; \forall x\in K : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

$$\Leftrightarrow\; \forall x\in K\ \forall \varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N(\varepsilon): \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

f_n konvergiert punktweise gegen f, f heißt Grenzfunktion

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt ptw. Kgt., wenn $\exists f : f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{ptw.}} f$

1. Bsp.: Funktionenfolge (f_n) mit $f_n(x) := x^{-n}$, $n\in\mathbb{N}$, $K = [1,2]$

Liegt punktweise Konvergenz vor? Gegen welche Grenzfunktion f?

Für $x \in]1,2]$ fest ist $f_n(x) = x^{-n} = e^{-n\underbrace{\log x}_{>0}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$,

und $f_n(1) = 1^{-n} = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$,

also liegt ptw. Kgz. vor: $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{ptw.}} f$ mit $f(x) := \begin{cases} 0, & x\in]1,2] \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

- <u>Gleichmäßige Konvergenz:</u>

$f_n \underset{n\to\infty}{\overset{\text{glm.}}{\Longrightarrow}} f \quad :\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N(\varepsilon):$

f_n konvergiert gleichmäßig gegen f $\qquad \forall x\in K: |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N(\varepsilon): \quad \|f_n-f\|_{\mathcal{C}^0}<\varepsilon.$

$\Leftrightarrow \|f_n-f\|_{\mathcal{C}^0}\xrightarrow{n\to\infty}0.$ $\qquad$ schreibe besser: $\mathcal{C}^0(K,\mathbb{C})$

Def.: <u>Supremumsnorm:</u>

$$\|f_n-f\|_{\mathcal{C}^0}:=\sup\{|f_n(x)-f(x)|;\ x\in K\}$$

$$\mathcal{C}^0(K,\mathbb{C}):=\{f:K\to\mathbb{C}\text{ stetig}\}$$

Fazit: Glm. Kgz. ist genau die Konvergenz im normierten Raum $(\mathcal{C}^0(K,\mathbb{C}),\|\cdot\|_{\mathcal{C}^0})$, dieser ist vollständig, d.h. Konvergenz und Cauchy-Konvergenz sind äquivalent.

Wichtigster Zusammenhang pktw. + glm. Kgz.: $\quad$ die Grenzfunktion f bei glm. Kgz. ist notwendigerweise die bei pktw. Kgz.!

$$\boxed{\left(f_n \underset{n\to\infty}{\overset{\text{glm.}}{\Longrightarrow}} f\right)\Longrightarrow\left(f_n\xrightarrow[n\to\infty]{\text{pktw.}}f\right)}$$

(aber nicht „$\Leftarrow$", vgl. 1. Bsp.)

2. <u>Bsp.:</u> Supremumsnorm von $f(x):=\frac{1}{x}$ in $K=[1,2]$ berechnen:
Haben: $\forall x\in[1,2]: \ \frac{1}{x}\leq\frac{1}{1}=1$, da f s.m.w.,
also: $\|f\|_{\mathcal{C}^0([1,2])}=1.$

3. <u>Bsp.:</u> Funktionenfolge $f_n(x):=x^{-n}$. Es gilt: $f_n\underset{n\to\infty}{\overset{\text{glm.}}{\Longrightarrow}}0$ auf $K=[\frac{3}{2},2]$,
denn $\|f_n-0\|_{\mathcal{C}^0([\frac{3}{2},2])}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-n}=\left(\frac{2}{3}\right)^n\xrightarrow{n\to\infty}0$ ✓

4. Bsp.: Funktionenfolge $f_n(x) := x^{-n}$, $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{ptw.}} f$ auf $K = [1,2]$
aus 1. Bsp.: keine glm. Kgz. gegen f, denn es gilt:

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n \geq N : \|f_n - f\|_{\mathcal{C}^0([1,2])} \geq \varepsilon,$$

nämlich mit $\varepsilon := 1$, $N \in \mathbb{N}$, $n := N$ gilt: $\quad$ für $x = 1$ ist $|x^{-N} - 1| = 0$

$$\|f_N - f\|_{\mathcal{C}^0} = \sup\{|x^{-N} - 0|; x \in]1,2]\} = 1 = \varepsilon.$$

• Sätze zur glm. Kgz.:

① $f_n \overset{\text{glm}}{\Longrightarrow} f$, alle f_n stetig $\Longrightarrow$ f stetig, $\quad \not\Leftarrow$

d.h. die Stetigkeit von Funktionen bleibt bei glm. Kgz. erhalten!

Beachte: f_n stetig, dann: ($f_n \overset{\text{glm}}{\not\Longrightarrow} f \Longleftarrow f$ unstetig)

5. Bsp.: im 4. Bsp. kann damit schneller bewiesen werden, daß $f_n \underset{\text{glm}}{\not\Rightarrow} f$ gilt: die Grenzfunktion $f(x) := \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$ ist unstetig

② $f_n \overset{\text{glm}}{\Longrightarrow} f$, alle f_n stetig $\Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$

(Vertauschbarkeit von Integration und GW-Bildung bei glm. Kgz.)

③ $f_n \xrightarrow{\text{ptw.}} f$, alle f_n st. diff'bar, $f_n' \overset{\text{glm.}}{\Longrightarrow} f'$ $\Longrightarrow f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$

(Vertauschbarkeit von Differentiation und GW-Bildung bei glm. Kgz.)

④ Weierstraß-Konvergenzkriterium: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Funktionenfolge, $f_n: K \to \mathbb{C}$,

Dann:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{C^0(K,\mathbb{C})} \text{ kgt.} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_n \text{ konvergiert absolut und gleichmäßig auf } K$$

$$\rightsquigarrow \Big(\underbrace{\sum_{n=0}^{N} f_n(x)}_{=: F_N(x)}\Big)_{N\in\mathbb{N}}$$

6. Bsp.: $f_n(x) := \frac{\sin(nx)}{n^2}$, $K := [0,1]$, Frage: $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ (glm.) kgt.?

dann ist $\|f_n\|_{C^0([0,1])} \leq \frac{1}{n^2}$ und da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ kgt.,

folgt mit Weierstraß, daß $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ auf $[0,1]$ abs+glm. kgt.

(Grenzfunktion kann allerdings nicht berechnet werden – außer über ihre Reihendarstellung)

7. Bsp.: $s_n(x) := nxe^{-nx^2}$, $K := [0,1]$, ptw. Grenzfunktion $s(x) := 0$

Gilt $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 s_n(x)\,dx \overset{?}{=} \int_0^1 \lim_{n\to\infty} s_n(x)\,dx$?

Nein: $\int_0^1 s_n(x)\,dx = -\frac{1}{2} e^{-nx^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(1-e^{-n}) \xrightarrow{n\to\infty} \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

und $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x) = 0$, also $\int_0^1 \underbrace{s(x)}_{=0}\,dx = \underline{\underline{0}}$

Grund: (s_n) konvergiert nicht gleichmäßig auf $[0,1]$ (vgl. frühere Ü)
(übrigens obwohl $s(x)$ stetig ist!)

"dass die Grenzfunktion stetig ist, ist notwendig für die gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenfolge aus stetigen Funktionen, aber nicht hinreichend"

[$A \Rightarrow B$: A hinr. für B und B notw. für A
$A \not\Leftarrow B$: B nicht hinr. für A und A nicht notw. für B]

Nachtrag zu Funktionenräumen:

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Dann: $\mathcal{C}^0(D,\mathbb{R}) := \{ f : D \to \mathbb{R} \text{ stetig} \}$, kurz: $\mathcal{C}^0(D)$

$\mathcal{C}^1(D,\mathbb{R}) := \{ f : D \to \mathbb{R} \text{ stetig diff'bar} \} = \{ f \in \mathcal{C}^0(D) ; f' \in \mathcal{C}^0(D) \}$,

$\mathcal{C}^{k+1}(D,\mathbb{R}) := \{ f \in \mathcal{C}^k(D) ; f^{(k+1)} \in \mathcal{C}^0(D) \}$, $k \in \mathbb{N}$.

(Supremums)Norm auf $\mathcal{C}^0(D)$: $\|f\|_{\mathcal{C}^0(D)} := \sup \{ |f(x)| ; x \in D \}$

Norm auf $\mathcal{C}^{k+1}(D)$: $\|f\|_{\mathcal{C}^k(D)} := \max \{ \|f^{(j)}\|_{\mathcal{C}^0(D)} \mid j = 0, \dots, k \}$

Es gilt: f stetig diff'bar $\Rightarrow$ f diff'bar

aber nicht umgekehrt:

1. Bsp.: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} x + x^2 \sin\left(\frac{2}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

ist diff'bar, $f'(0) = 1 > 0$

und für $x \neq 0$ ist $f'(x) = 1 + \underbrace{2x \sin\left(\frac{2}{x}\right)}_{\to 0 \text{ für } x \to 0} - \underbrace{2\cos\left(\frac{2}{x}\right)}_{\text{hier ex. kein GW für } x \to 0}$

$\rightsquigarrow$ die Ableitung f' ist unstetig!

2. Bsp.: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} x\sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

und $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{\sqrt{x}} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x \neq 0$,

$$\frac{f(x) - 0}{x - 0} = \sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \to 0} 0, \text{ also } f'(0) = 0$$

$\rightsquigarrow$ die Ableitung f' ist unstetig, auf $[-1,1]$ sogar unbeschränkt!

§9: Potenzreihen

Eine Potenzreihe ist eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) mit

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n .$$

(auch $\mathbb{C}$ mögl.)

Hier ist $a \in \mathbb{R}$ der Entwicklungspunkt, die $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ heißen Koeffizienten der Potenzreihe.

Ihre Werte können numerisch gut berechnet werden: $c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots$

1. Bsp.: • Geom. Reihe $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ auf $D =]-1,1[$,

• Exponentialfkt. $\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ auf $D = \mathbb{R}$

Eine Potenzreihe ist eine Funktionenfolge:

$$(F_N(x))_{N\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{n=0}^{N} c_n (x-a)^n\right)_{N\in\mathbb{N}}$$

Daher greifen auf Potenzreihen auch die Sätze zu Funktionenfolgen.

Meist wird $a = 0$ als Entwicklungspunkt genommen.

Bei jeder Potenzreihe (um a) liegt einer der drei Fälle vor:

1. Kgz. nur für $x = a$
2. Kgz. für alle $x \in \mathbb{R}$
3. Kgz. für alle $x \in]a-R, a+R[=: I$

   $R > 0$ eine reelle Zahl, aber Divergenz für ein $x \notin I$

$\leadsto$ im 3. Fall heißt R Konvergenzradius und I Konvergenzintervall

(bei komplexen Potenzreihen ist der Konvergenzbereich ein Kreis mit Mittelpunkt a, kein Intervall! $\leadsto$ "Konvergenzkreis")

Def. Kgz.radius: $R := \sup\{ r > 0 ; \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ kgt. auf $]a-r, a+r[\}$, falls 3. Fall vorliegt

in 1.: "$R=0$", in 2.: "$R=\infty$"

Berechnung des Kgz.radius (nach Cauchy-Hadamard), für $a=0$:

$$\boxed{\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}} \quad \text{und} \quad \boxed{\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|}$$

(aus Wurzel- bzw. Quotientenkriterium)

Satz zur glm. Kgz. von (reellen) Potenzreihen:

Jede Potenzreihe konvergiert auf einem IV $[c,d]$, das ganz in ihrem KonvergenzIV $]a-R, a+R[$ enthalten ist, gleichmäßig.

Für $x \in]a-R, a+R[$ gilt: x liegt in einem abg. IV $[c,d] \subseteq]a-R, a+R[$, nahe x konvergiert die Potenzreihe also gleichmäßig.

Daher gilt: • $\forall x \in]a-R, a+R[: \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n\right)'$

$$\overset{\text{glm. Kgz.}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left((x-a)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot n (x-a)^{n-1}$$

d.h. Potenzreihen können gliedweise abgeleitet werden.

• $\forall u, v \in]a-R, a+R[: \int_u^v \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n\right) dx$

$$\overset{\text{glm. Kgz.}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_u^v (x-a)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot \left.\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}\right|_u^v$$

d.h. Potenzreihen können gliedweise integriert werden.

• Potenzreihen sind auf ihrem Kgz.IV unendlich oft stetig diff'bar!

2. <u>Bsp.:</u> Berechnung von $\log(1+x)$ als Potenzreihe:

$$\log'(1+x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k, \quad \text{für } |x|<1, \text{ d.h. } -1<x<1$$

also ist $\log(1+x) = \int_0^x \log'(1+t)\,dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k\,dt$

$$\overset{\text{glm. Kgz.}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^x t^k\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}.$$

Ebenso, mit derselben Idee: arctan-Reihe, $\arctan' y = \frac{1}{1+y^2}$

<u>Identitätssatz für Potenzreihen / Koeffizientenvergleich:</u>

Existiert ein $\delta>0$ mit $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-a|<\delta$ (d.h. für $x \in]a-\delta, a+\delta[$),

so folgt $\forall n \in \mathbb{N}_0: b_n = c_n$,

dann müssen die Reihen vollständig identisch sein. [vgl. Heuser, Nr. 64.5]

[Dies folgt auch schon, wenn die beiden Potenzreihen auf irgendeiner Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \to a$ übereinstimmen.]

- Hat man ein und dieselbe Fkt. $f(x)$ mit zwei Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ dargestellt, darf man also gleichstellige Koeffizienten vergleichen, d.h. also $b_n = c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$

3. Bsp.: Lösen einer Differentialglg. mit Potenzreihenansatz:

Gesucht: $y = f(x)$ mit $y' = x \cdot y$, $\underbrace{y(0)=1}_{c_0=1}$, $\underbrace{y'(0)=0}_{c_1=0}$

Ansatz: $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, gesucht: $c_n = ?$

Dann: $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot n x^{n-1} \overset{!}{=} x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^{n-1}$,

also $c_1 = 0$, $2c_2 = c_0$, $3c_3 = c_1$, $4c_4 = c_2$, $5c_5 = c_3$, ...

(Identitätssatz)

Also: alle $c_{2n} = 0$, $c_{2n+1} = \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}$,

Lsg.: $y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} \cdot x^{2n+1}$.

4. Bsp.: Herleiten von expliziten Formeln für rekursiv definierte Folgen:

Betr. die Fibonaccifolge $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$

Dann setze $F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} x^n$, da $\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}\right| < 2$ liegt Kgz. wenigstens für $|x| < \frac{1}{2}$ vor.

Die Rekursionsformel zeigt:

$$F(x) - x F(x) - x^2 F(x) = 1,$$

also ist $F(x) = \frac{-1}{x^2 - x - 1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{x - x_2} - \frac{1}{x - x_1}\right)}_{\text{Entwicklung in geom. Reihe möglich}}$,

wo $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ und $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$

$\rightsquigarrow F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \right)}_{= f_{n+1} \text{ wegen Identitätssatz,}} \cdot x^n$

haben also Binetsche Formel hergeleitet.