Repetitorium Analysis 1 – Stoffwiederholung + Vertiefung / Beispiele + Aufgaben

§1: Aufbau des Zahlensystems

$\mathbb{N}$ natürliche Zahlen: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ ⤳ vollst. Induktion

$\cap$

$\mathbb{Z}$ ganze Zahlen: $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N})$

$\cap$

$\mathbb{Q}$ Körper, Rechnen mit Zahlen ↙ { Körperaxiome: Relationen $+, \cdot$, assoziativ, Ex. des neutralen El., Ex. des Inversen (außer mult. Inv. der 0, ex. nicht), kommutativ, distributiv

$\cap$

$\mathbb{R}$ **reelle Zahlen**: Körperaxiome, Anordnungsaxiome, Vollständigkeitsaxiom

$\cap$

$\mathbb{C}$ **Komplexe Zahlen**: $\mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R} := \{\overset{\text{Realteil}}{a} + i\overset{\text{Imaginärteil}}{b} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ mit $i^2 = -1$, nicht anordenbar! (aber vollst.)

Anordnungsaxiome:
1) $\forall x \in \mathbb{R}: x > 0 \lor x = 0 \lor -x > 0$
2) $\forall x, y \in \mathbb{R}: x, y > 0 \Rightarrow x \overset{+}{\cdot} y > 0$

} → Rechnen mit Ungleichungen + Betrag

Betrag: $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto |x| := \max\{x, -x\}$ → $|-x| = |x|$

"$|x|$ ist der Abstand von x zum Nullpunkt":
1) $|x| \geq 0$ und $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
3) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Δ-Ungl.)

Bem. zur Δ-Ungl.: wird oft auch in der Form $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$ angewendet. ("Mindestabstand zwischen x und y")

Bew. der alternativen Form der Δ-Ungl.: (Herleitung aus der Δ-Ungl.)

$$|x|-|y| = |(x\overbrace{-y)+y}^{=0}| - |y| \overset{\Delta}{\leq} |x-y|+|y|-|y| = |x-y|$$

$$-(|x|-|y|) = |y|-|x| = |y-x+x|-|x| \underset{\Delta}{\leq} |y-x|+|x|-|x| = |x-y|$$

$$\Rightarrow ||x|-|y|| = \max\{|x|-|y|, -(|x|-|y|)\} \leq |x-y|. \qquad \square$$

Bemerkung: $||x|-|y|| \leq |x-y|$ ist äquivalent zu
$|x|-|y| \leq |x-y|$ und $|y|-|x| \leq |x-y|$.
Beide Ungleichungen werden oft verwendet.

Bsp. zum Rechnen mit Ungl. + Beträgen:

Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt: $|x-1| \leq |x+5|$?

Manchmal Trick:
Quadrieren: $|x|^2 = x^2$,
um $||$ loszuwerden, aber:
⤳ wird komplizierter...

Mit Def. von $|\cdot|$:

$|x-1| = \max\{x-1, -x+1\}$, bestimme $x \in \mathbb{R}$ mit $x-1 \leq |x+5| \underbrace{\wedge}_{\text{„und"}} -x+1 \leq |x+5|$

Dann: $x-1 \leq \max\{x+5, -x-5\} \wedge -x+1 \leq \max\{x+5, -x-5\}$

$$\Leftrightarrow (x-1 \leq x+5 \underbrace{\vee}_{\text{oder}} x-1 \leq -x-5) \wedge (-x+1 \leq x+5 \vee -x+1 \leq -x-5)$$

$$\Leftrightarrow (\underbrace{\underbrace{-1 \leq 5}_{\text{wahr}} \vee \ldots}_{\text{wahr}}) \wedge (\underbrace{-2x \leq 4}_{\text{wahr genau für } x \geq -2} \vee \underbrace{1 \leq -5}_{\text{falsch}})$$

Also gilt die Ungl. für alle $x \in \mathbb{R}, x \geq -2$.

✓

$(\mathbb{R}, d(x,y) := |x-y|)$ ist Bsp. für metrischen Raum: $(X,d), d: X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,

1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ 2) $d(x,y) = d(y,x)$ 3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

„$d(x,y)$ ist der Abstand der beiden Punkte $x,y \in X$"
↳ „Abstandsmessung"

Bsp. für Aufgabe mit abstraktem metrischem Raum:

Beh.: In einem (bel.) metrischen Raum (X,d) gilt: $d(x,z)^2 \leq d(x,y)^2 + d(y,z)^2 + 2\,d(x,y)\,d(y,z)$.

Bew.: $d(x,z)^2 \underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} (d(x,y) + d(y,z))^2 = d(x,y)^2 + d(y,z)^2 + 2\,d(x,y)\,d(y,z)$. □

Rechnen mit den komplexen Zahlen, in $\mathbb{C}$:

$$(a+ib) + (c+id) = (a+c) + i(b+d)$$

$$(a+ib) \cdot (c+id) = (ac - bd) + i(bc + ad)$$

$$\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{-b}{a^2+b^2}$$

Bsp. zum Rechnen in $\mathbb{C}$:

Aufgabe: Schreibe $\frac{-1+2i}{3-i}$ in der Form $a+ib \in \mathbb{C}$.

Haben $$\frac{-1+2i}{3-i} = \frac{(-1+2i)(3+i)}{3^2+1^2} = \frac{-3-i+6i-2}{10} = \frac{-5}{10} + \frac{5}{10}i$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Rechnen mit Exponenten/Wurzeln: Hatten $a^x := e^{x \log a}$ für $a > 0$

Rechenregeln für exp: $e^x \cdot e^y = e^{x+y}, (e^x)^y = e^{xy}, e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

für Potenzen/Wurzeln: $a^x b^x = (ab)^x, a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

für log: $\log(xy) = \log x + \log y, \log(x^a) = a \log x,$

$\log_a x = \frac{\log x}{\log a} = \frac{1}{\log a} \cdot \log x$

Bsp.: $a^{2x} = b \Leftrightarrow e^{2x \log a} = e^{\log b} \Leftrightarrow 2x \log a = \log b \Leftrightarrow x = \frac{\log b}{2 \log a}$

$a^{x^2} = (a^x)^x, \quad \log(xe^2) = 2 + \log x,$

$a^x \cdot a^x = a^{2x}, \quad \ldots$

Teilmengen von $\mathbb{R}$ und Schranken: Sei $A \subseteq \mathbb{R}$.

$s \in \mathbb{R}$ ist obere Schranke von A, falls $\forall x \in A : x \leq s$

A nach oben beschränkt $:\Leftrightarrow \exists s \in \mathbb{R} : s$ ob.S. von A

" unten " $:\Leftrightarrow \exists s \in \mathbb{R} : s$ un.S. von A

sei A beschränkt, d.h. nach oben und unten beschr.

Supremum = kleinste obere Schranke: $\sup A := \min\{s \mid s \text{ o.S. von } A\}$

Infimum = größte untere Schranke: $\inf A := \max\{s \mid s \text{ u.S. von } A\}$

$\mathbb{R}$ ist vollständig!

Vollständigkeitsaxiom (in $\mathbb{R}$): Jede nach oben beschr. Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum in $\mathbb{R}$.

Formal: $\forall M \subseteq \mathbb{R}$, M beschränkt: $\exists \alpha \in \mathbb{R} : \alpha = \sup M$

($\mathbb{Q}$ nicht vollst., da $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$ kein Supremum in $\mathbb{Q}$ hat)

Intervalle: $M \subseteq \mathbb{R}$ mit: $\forall x,y \in M, x<y: (\forall z \in \mathbb{R}, x<z<y: z \in M)$

Sei $a<b$.

offen: $]a,b[:= \{x \in \mathbb{R}; a<x<b\}$, $]a,\infty[:= \{x \in \mathbb{R}; x>a\}$, $]-\infty,a[:= \{x \in \mathbb{R}; x<a\}$

abg.: $[a,b] := \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$, $[a,\infty[:= \{x \in \mathbb{R}; x \geq a\}$, $]-\infty,a] := \{x \in \mathbb{R}; x \leq a\}$

$[a,b[$, $]a,b]$ sind weder offen noch abgeschlossen

⇝ sup/inf von Intervallen und Vereinigungen von IVen sind leicht bestimmbar:

Bsp.: $\sup\,]a,b[= b$, $\inf\,]a,b[= a$, $\sup\,]a,b] = b$, ...

IVschachtelung: Folge $(]a_n,b_n[)_{n \in \mathbb{N}}$ von Intervallen mit:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$$

Ist $(b_n - a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge, konvergieren (a_n) und (b_n) gegen einen Grenzwert $\alpha \in \mathbb{R}$.

Bsp.: $[1.4, 1.5]$, $[1.41, 1.42]$, $[1.4142, 1.4143]$, ... ⇝ GW ist $\sqrt{2}$

Vollständige Induktion: Beweismethode für Aussagen der Form "$\forall n \in \mathbb{N}: A(n)$"

(aber nicht für jede derartige Aussage!)

Bsp. Aussage: "$\forall n \in \mathbb{N}$: $f(x) := x^{2n}$ ist gerade Funktion", d.h. $\forall x \in \mathbb{R}: f(-x) = f(x)$. Beweis geht direkt: Für $n \in \mathbb{N}$ ist $f(-x) = (-x)^{2n} = (-1)^{2n} x^{2n}$

$= x^{2n} = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. □

Bsp. für Beweis mit vollst. Induktion:

Beh.: $\forall n \in \mathbb{N}: \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$ bzw. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Bew. mit vollst. Ind.: $\underset{\sim}{n=0}$: $\binom{n}{0} = 1 = 2^0$ ✓, $n \rightsquigarrow n+1$:

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \overset{\uparrow}{=} \underbrace{\binom{n+1}{0}}_{=1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) + \underbrace{\binom{n+1}{n+1}}_{=1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1}$$

└ Rekursionsformel für Binomialkoeff.

$$\underset{\text{Ind.vor.}}{=} 2^n + 2^n = 2^{n+1}. \checkmark \square$$

§2: Folgen und Konvergenz

Zahlenfolge: Abb. $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (reelle Zahlenfolge),
Notation: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

(a_n) rekursiv definiert: $a_n :=$ Formel mit a_k für $k < n$
und Anfangswerte,
Bsp.: $a_n := a_{n-1} + 1$, $a_1 := 1 \to$ $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$ …

Bem.:
- Rekursive Formeln beweist man oft direkt.
- Explizite Formeln, im Bsp. die Beh. "$\forall n: a_n = n$" mit Induktion unter Verwendung der Rekursion im Induktionsschritt, falls diese bekannt ist

(a_n) beschränkt: $\exists C > 0\ \forall n \in \mathbb{N}: |a_n| \leq C$

(a_n) monoton: $\forall n \leq m: a_n \leq a_m$ (d.h. m.w.)
oder $\forall n \leq m: a_n \geq a_m$ (d.h. m.f.)

(a_n) Konvergent: $\exists a \in \mathbb{R}$: a ist Grenzwert von (a_n), Formel: $\lim a_n = a$

a Grenzwert von (a_n): $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0: |a_n - a| < \varepsilon$ $\quad a_n \to a$

(a_n) divergent $:\Leftrightarrow$ (a_n) nicht Konvergent

(a_n) bestimmt divergent: • $a_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty :\Leftrightarrow \forall K > 0\ \exists n \in \mathbb{N}: a_n > K$
oder • $a_n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty :\Leftrightarrow \forall K > 0\ \exists n \in \mathbb{N}: a_n < -K$

(a_n) Cauchy-Konvergent: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall m, n \geq n_0: |a_n - a_m| < \varepsilon$

$A(n)$ gilt für „hinreichend große" n $:\Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0: A(n)$

GW sätze: $a_n \to a$, $b_n \to b \Rightarrow a_n \overset{+}{\cdot} b_n \to a \overset{+}{\cdot} b$,
$a_n \to a$, die $a_n \neq 0$, $a \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{a_n} \to \frac{1}{a}$

In vollständigen Räumen gilt: (a_n) Konvergent $\Leftrightarrow$ (a_n) Cauchy-Konvergent
Bsp.: $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ sind vollständig

Konvergenztests?
Monotonie des GWs: $a_n \to a$, $b_n \to b$, $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq b_n \Rightarrow a \leq b$

Sandwich-Lemma / Quetsch-Lemma:
Vor.: $a_n \to \underline{\underline{a}}$, $b_n \to \underline{\underline{a}}$, geg. (c_n), $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq c_n \leq b_n$
Beh.: c_n Kgt., $c_n \to \underline{\underline{a}}$.

Satz von Bolzano-Weierstraß:

Jede beschränkte reelle Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

Häufungspunkt einer Folge: $x \in \mathbb{R}$ heißt HP einer Folge (a_n), falls $\forall \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |a_n - x| < \varepsilon$,

d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es unendl. viele Folgenglieder mit Abstand höchstens ε zu x,

bzw. es gibt eine Teilfolge von (a_n), die gegen x kgt.

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{k\to\infty}\left(\sup\{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots\}\right)$$

Der Limsup von (a_n) ist der größte Grenzwert einer konvergenten Teilfolge von (a_n).

Beispiele:

- 1 und -1 sind HP von $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$
- $a_n := \begin{cases} -1, & n = 1 \\ n, & n \text{ gerade}, n > 1 \\ \frac{1}{n}, & n \text{ ungerade}, n > 1 \end{cases}$

  HP von (a_n) ist 0

  $\liminf\{a_n ; n \in \mathbb{N}\} = 0$

  $\inf\{a_n ; n \in \mathbb{N}\} = \min\{a_n ; n \in \mathbb{N}\} = -1$

§3: Reihen

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folge.

Reihe: Folge $a_0,\ a_0+a_1,\ a_0+a_1+a_2,\ \dots$ von Partialsumme
bzw. $(a_0+\dots+a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$
bzw. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

n-te Partialsumme

Geometrische Reihe: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q},\ -1<q<1$

harmonische Reihe: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert!

$\sum a_n$ konvergent $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ (a_n) Nullfolge $\Big\}$ Also: $(a_n)\not\to 0 \Rightarrow \sum a_n$ div.

$\sum a_n$ **absolut Konvergent**: $\Leftrightarrow \sum |a_n|$ kgt.

$\sum a_n$ abs. kgt. $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \sum a_n$ kgt.

$\left(\sum (-1)^n \cdot \frac{1}{n}\right)$

Konvergenzkriterien: Geg. $\sum a_n$, wann kgt.?

Majoranten: $\sum c_n$ kgt., alle $c_n \ge 0$,
$|a_n| \le c_n$ für alle hinr. gr. n $\Rightarrow \sum a_n$ abs. Kgt.

Quotienten: $\forall n: a_n \neq 0$, $\exists\, 0<\theta<1: \forall n: \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le \theta \Rightarrow \sum a_n$ abs. kgt.

Wurzel: $\exists\, 0<\theta<1: \forall n: \sqrt[n]{|a_n|} \le \theta \Rightarrow \sum a_n$ abs kgt.

Leibniz: alle $a_n \ge 0$, (a_n) mon. fallend, $a_n \to 0 \Rightarrow \sum (-1)^n a_n$ kgt.

(Cauchy-) Verdichtung: alle $a_n \ge 0$, (a_n) mon. fallend. Dann: $\sum a_n$ kgt. $\Leftrightarrow \sum 2^n a_{2^n}$ kgt.

Teleskopreihe: $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1})$ bzw. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$

Partialsummen: $\sum_{n=1}^{N} (a_n - a_{n-1}) = a_N - a_0$ bzw. $\sum_{n=1}^{N} (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{N+1}$

Sie Konvergieren genau dann, falls $\lim_{N\to\infty} a_N =: a$ existiert.
Ihr GW ist dann $a - a_0$ bzw. $a_1 - a$.

Bsp: $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N\to\infty} 1$, also: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$