Ungelöste Probleme der Zahlentheorie

Teil 6: Die verallgemeinerte Riemannsche Vermutung und Siegel-Nullstellen

Die ζ-Fkt. in $\mathrm{Re}\, s > 1$ wird durch die einfachste Dirichlet-Reihe $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ dargestellt.

Eine Funktion, die durch $f(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$, die $a_n \in \mathbb{C}$, dargestellt wird, heißt Dirichlet-Reihe. Konvergiert sie in einem $s = \sigma_0 \in \mathbb{R}$, dann auch (kompakt) in dem "Trichter" $K_\delta := \{s \in \mathbb{C} \mid |\arg(s - s_0)| \leq \frac{\pi}{2} - \delta\}$

Somit: Existiert $\sigma_0 := \inf\{\sigma \in \mathbb{R} \mid \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\sigma + it}}$ kgt. für ein $t \in \mathbb{R}\}$, so liegt (kompakte) Kgz. auf der Halbebene $\mathrm{Re}\, s > \sigma_0$ vor. (σ_0 heißt "Konvergenzabszisse")

In diesem Fall ex. auch $\bar{\sigma} := \inf\{\sigma \in \mathbb{R} \mid \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\sigma+it}}$ abs. Kgt. für ein $t \in \mathbb{R}\}$, (auch: $\bar{\sigma}$ ex. $\Rightarrow \sigma_0$ ex.), und es gilt:

$$\sigma_0 \leq \bar{\sigma} \leq \sigma_0 + 1.$$

Sei $k \in \mathbb{N}$.

Def.: Eine Fkt. $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ heißt (Dirichlet-) Charakter (auch: Zahl-Charakter) mod k, falls
(i) $|\chi(g)| = 1$ falls $(g,k) = 1$, $\chi(g) = 0$ falls $(g,k) > 1$,
(ii) $\forall g, h \in \mathbb{Z}: \chi(gh) = \chi(g)\chi(h)$, d.h. χ ist vollständig multiplikativ,
(iii) $\forall g \in \mathbb{Z}: \chi(g+k) = \chi(g)$, d.h. χ ist k-periodisch.

Der Charakter $\chi_0(g) := \begin{cases} 1, & (g,k) = 1 \\ 0, & (g,k) > 1 \end{cases}$ heißt Hauptcharakter mod k.

Es gibt $\varphi(k) := \#\{g \in \{1, \dots, k\} \mid (g,k) = 1\}$ viele Charaktere mod k.

Diese Charaktere hängen eng mit den Restklassen mod k zusammen: Ist $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $\sum_n |f(n)| < \infty$, $(a,k) = 1$, so ist für $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{N}$:

$$\sum_{\substack{n \in \mathcal{N} \\ n \equiv a (k)}} f(n) = \frac{1}{\varphi(k)} \cdot \sum_{\chi \bmod k} \bar{\chi}(a) \sum_{n \in \mathcal{N}} f(n)\chi(n).$$

(beweisbar mit den "Orthogonalitätsrel." für die χ)

Mit dieser Formel, wenn $f \equiv 1$, können
die $n \in \mathcal{N}$ in der Restklasse $n \equiv a\ (k)$ gezählt werden.
Für $\mathcal{N} = \mathbb{P}$ also Primzahlen. (Bei der Wahl der Fkt. f kann man geeignet vorgehen.)

Man setzt $\pi(x; k, a) := \#\{p \in \mathbb{P} \mid p \equiv a\ (k) \text{ und } p \leq x\}$.

Was nun die ζ-Fkt. für $\pi(x)$ ist, ist die Dirichlet-L-Fkt. für $\pi(x; k, a)$:
Für $\chi \bmod k$
und $\operatorname{Re} s > 1$ sei $L(s, \chi) := \sum_{n \geq 1} \frac{\chi(n)}{n^s}$, für bel. $s \in \mathbb{C}$ betr. die meromorphe Fortsetzung von L. (Lediglich $L(s, \chi_0)$ hat einen Pol, bei $s = 1$.)

Mittels diesen L-Funktionen kann analog zum PZS
auch der PZS in Progressionen gezeigt werden:

$$\pi(x; k, a) = \frac{1}{\varphi(k)} \cdot li(x) \, (1 + \underbrace{o(1)}_{\text{kann von } k, a \text{ abhängen}}) \quad \text{für } k \geq 1 \text{ fest}, \ x \to \infty.$$

Die PZen verteilen sich demnach asymptotisch gleichmäßig auf die $\varphi(k)$ vielen reduz. Restklassen mod k.
Auch hier ist die Frage nach einer genauen Fehlertermabschätzung interessant
und wichtig:
Die Vermutung, dass $\pi(x; k, a) = \frac{1}{\varphi(k)} li(x) + O(x^{1/2 + \varepsilon})$, $\varepsilon > 0$ bel., gilt,
ist äquivalent zur "großen" bzw. verallgemeinerten Riemannschen Vermutung
(Kurz: (GRH)). Diese besagt, dass für (jedes) $k \geq 1$ und jeden Charakter
$\chi \bmod k$ die Nullstellen der L-Fkt. $L(s, \chi)$ im Streifen $0 \leq \sigma \leq 1$
alle den Realteil $\frac{1}{2}$ haben.

Nun kommt es in Anwendungen (etwa die major arc-Abschätzung im ternären Goldbach-Problem nach
Vinogradov) aber gerade auch auf die Gleichmäßigkeit des Fehlerterms
in a und k an, wenn eine Formel für $\pi(x; k, a)$ angewendet wird.

Wird die (GRH) angenommen, kann

$$\pi(x;k,a) = \frac{li(x)}{\varphi(k)}\left(1+O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right)$$ gleichmäßig für alle $k \le x^{1/2} \log^{-3} x$, $(a,k)=1$, gezeigt werden,

d.h. die Konstante im O-Symbol ist dann unabh. von a und k.

Ohne unbewiesener Ann. kann nur folgende Absch. gezeigt werden

(Satz von Siegel-Walfisz): $\forall A>0 \;\; \exists D_1(A), D_2(A)>0$:

$\forall x \ge 2,\; k \le (\log x)^A,\; (k,a)=1$:

$$\left|\pi(x;k,a) - \frac{li(x)}{\varphi(k)}\right| \le D_2 \, x \cdot \exp\left(-D_1 (\log x)^{1/10}\right).$$

↳ hängt von A ab, aber nicht in effektiver Weise angebbar (Effektive Versionen sind noch schwächer!)

Nun kann man zeigen:

Zu jedem Modul k ex. höchst. ein Ausnahmecharakter $\tilde{\chi}$ mod k (der reell ist, d.h. $\tilde{\chi}^2 = \chi_0, \tilde{\chi} \ne \chi_0$) und dazu höchstens eine reelle Nullstelle β von $L(s,\tilde{\chi})$ mit $1 - \frac{c}{\log k} < \beta < 1$ ($c>0$, angebbar).

Eine solche (mögliche) Ausnahmenullstelle heißt Siegel-Nullstelle, auch Landau-Siegel-Nullstelle.

Die expl. Formel $\psi(x;k,a) = \frac{x}{\varphi(k)} - \frac{\tilde{\chi}(a)\cdot x^\beta}{\varphi(k)\cdot\beta} + \text{Rest}$

zeigt: Für $\tilde{\chi}(a)=1$ kann der x^β-Term den Hauptterm nahezu auslöschen, für $\tilde{\chi}(a)=-1$ hingegen nahezu verdoppeln.

Die Existenz solcher problematischer Siegel-Nullstellen kann nicht ausgeschlossen werden. Ist die (GRH) wahr, gibt es diese nicht.

Mit Sieb-Methoden kann die Brun-Titchmarsh-Unglg. gezeigt werden: Für $1 \le k < x$ gilt:

$$\pi(x;k,a) \le 2 \cdot \frac{x}{\varphi(k)\log(x/k)}.$$

Man vermutet, dass der Faktor 2 hier durch jede Zahl > 1 ersetzt werden kann. Wäre es möglich, diesen durch irgendeinen Faktor < 2 zu ersetzen, folgte, daß keine Siegel-Nst. mod k existiert (Motohashi 1979).

Es gibt noch weitere Vermutungen, deren Gültigkeit die Nichtexistenz von Siegel-Nullstellen nach sich ziehen (z.B. die Arbeiten von Iwaniec & Sarnak über modulare L-Funktionen).

Hingegen hat aber auch die Existenz von Siegel-Nullstellen bemerkenswerte Konsequenzen:

Heath-Brown hat 1983 gezeigt:

Falls es Siegel-Nst. gibt (genau: gibt es eine unendl. Folge von Moduln k mit Siegel-Nst. β so, dass $(1-\beta)\log m \xrightarrow{m\to\infty} 0$),
dann gibt es unendl. viele PZ Zwillinge $p, p+2 \in \mathbb{P}$.

Wir bringen beim nächsten Mal noch eine praktische Anwendung der (GRH), nämlich, wie die (GRH) in probabilistischen Primzahltests, die heutzutage in der Kryptographie verwendet werden, eine prominente Rolle spielt.