Ungelöste Probleme der Zahlentheorie

Teil 5: Die Riemannsche Vermutung

1859, B. Riemann ("Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse"):
Untersuchungen zur ζ-Fkt. $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, Reihe kgt. für $\operatorname{Re} s > 1$

Riemann zeigte: ζ ist bis auf einen Pol bei $s=1$ ($\rightsquigarrow$ harmonische Reihe) auf $\mathbb{C}$ analytisch fortsetzbar, und die Fkt.

$$\xi(s) := \frac{1}{2} s(s-1)\pi^{-s/2}\,\underset{\uparrow}{\Gamma}\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

ist analytisch auf $\mathbb{C}$ und Gamma-Fkt. $\Gamma(x) := \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt$

erfüllt die Funktionalgleichung. $\xi(1-s) = \xi(s)$.

Euler zeigte: $\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$ für $\operatorname{Re} s > 1$,

solche Produkte werden Euler-Produkte genannt.
Diese Euler-Formel kann als analytische Version des Satzes von der eind. PFZ ("Fundamentalsatz der Arithmetik") angesehen werden. Sie liefert einen ersten Hinweis darauf, dass die ζ-Fkt. mit der Menge der Primzahlen $\mathbb{P}$ zusammenhängt.
Riemanns Untersuchungen zielten nun darauf ab, für die PZ zählfkt.

$$\pi(x) := \#\{p \le x \mid p \in \mathbb{P}\},\quad x > 1,$$

die 1849 von Gauß formulierte Vermutung $\pi(x) \sim li(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log t}$ (*)
zu zeigen. (Gauß stützte sich auf PZen $\le 3 \cdot 10^6$)
Numerische Untersuchungen legen nahe, dass sogar
(RH) $\pi(x) = li(x) + O(x^{1/2+\varepsilon})$ für jedes $\varepsilon > 0$ gelten sollte.
Diese Vermutung ist eine elementare Version der Riemannschen Vermutung (kurz: RH für "Riemann hypothesis").

Weiter legen die numerischen Werte (auch die heutigen bis $\approx 10^{23}$) nahe, dass $li(x) > \pi(x)$ für alle x gelten könnte.
Dies wurde 1914 von Littlewood widerlegt, der zeigte, dass $li(x) - \pi(x)$ unendl. viele VZwechsel besitzt.
Skewes, der bei Littlewood darüber promovierte, zeigte 1933 in seiner Dissertation, dass der erste VZwechsel noch vor $x \leq 10^{10^{10^{34}}}$ vorkommt (die Grenze heißt Skewes-Zahl und war damals die größte Zahl, die in der Mathematik eine Rolle spielte).

Heute weiß man, dass der VZwechsel vor $1{,}39 \cdot 10^{316}$ ist (Bays & Hudson 2000).

Die von Riemann formulierte analytische Version der RH lautet:
Alle (komplexen) Nullstellen der ζ-Funktion im "kritischen" Streifen $S := \{s \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re} s < 1\}$ der komplexen Ebene haben den Realteil $\frac{1}{2}$.

Bem.: Außerhalb des Streifens hat die Fkt. ζ keine weiteren Nullstellen außer den "trivialen" bei $s = -2, -4, -6, \ldots$, wie aus der Eulerproduktformel und der Funktionalglg. für ζ abgelesen werden kann. Man beachte ferner, dass die für $\operatorname{Re} s > 1$ geg. Reihendarstellung im Streifen nicht gilt, da dort die Reihe divergiert.
Eine im Streifen gültige analytische Fortsetzung ist geg. durch

$$(0) \quad \zeta(s) = \frac{1}{s-1} + 1 - s \int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^{s+1}}\,dt, \quad \text{wo } \{t\} := t - \lfloor t \rfloor,$$

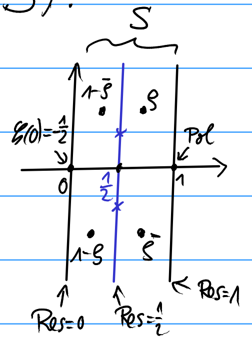
($\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$ ist die (untere) Gaußklammer von x)

Wir zeigen (0) etwas später als Anhang.

Eine weitere Darstellung von ζ in S ist

$$\zeta(s) = A(s)\cdot\left(2^{1-s}-1\right)^{-1} \quad \text{mit } A(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-s} \quad \text{für } \operatorname{Re} s > 0.$$

Aus dieser kann man ablesen: $\zeta(s)=0 \Rightarrow \zeta(\bar{s})=0$ (für $s\in S$)
und die Funktionalglg. zeigt: $\zeta(s)=0 \Rightarrow \zeta(1-s)=0$ (für $s\in S$).



Daher sind, wenn $\frac{1}{2}+\varepsilon+it$ eine Nst. von ζ wäre $(\varepsilon\geq 0)$, auch $\frac{1}{2}-\varepsilon+it$, $\frac{1}{2}+\varepsilon-it$, $\frac{1}{2}-\varepsilon-it$ Nst. von ζ.

Alle bisher gefundenen Nst. in S haben den Realteil $\frac{1}{2}$.

Riemann konnte die Vermutung von Gauß (*) nicht zeigen, seine Arbeit stellte aber einen großen Fortschritt dar: Für $\pi(x)$ formulierte er eine Formel, in der die Nullstellen von ζ explizit vorkommen, die sogenannte "explizite Formel".
In der äquivalenten, technisch etwas leichteren Version für die Tschebyschev-Fkt. $\Psi(x) := \sum_{\substack{n\leq x, \\ \text{falls } n=p^{\alpha} \text{ eine Primpotenz}}} \log p$

lautet diese

$$\Psi(x) = x - \sum_{\substack{\rho\in S, \\ \zeta(\rho)=0}} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \log 2\pi - \frac{1}{2}\log\left(1-x^{-2}\right)$$

(für alle x, die keine Primpotenz sind).

Die Vermutung von Gauß (*) ist äquivalent zur Beh. $\Psi(x)\sim x$, und an der expliziten Formel kann $(RH) \Leftrightarrow \Psi(x)-x = O(x^{1/2+\varepsilon}),\ \varepsilon>0,$ abgelesen werden.

Gauß' Vermutung (*) konnte erst 1896 von Hadamard und de la Vallée-Poussin (unabhängig voneinander) gezeigt werden.
Die Asymptotik (*) heißt heute der Primzahlsatz (kurz: PZS).
(Dafür genügt es, $\zeta(1+it) \neq 0$ für $t \neq 0$ zu zeigen, was Riemann schon erkannte.)

Die genaue Fehlerabsch. in (*) ist für vielerlei Anwendungen mit Primzahlen von besonderem Interesse, was die (RH) so wichtig macht.

Die bislang beste bewiesene Fehlerabsch. im PZS ist

$$\pi(x) = li(x) + O\left(x \exp\left(-(\log x)^{3/5} (\log\log x)^{-1/5}\right)\right)$$

von Vinogradov & Korobov von 1958.

In einem kürzlich eingereichten Paper (März 2012 bei arXiv) von O. Ramaré gelingt die erste Verbesserung seit 1958, er zeigt darin die Abschätzung
$$\pi(x) = li(x) + O\left(x \exp\left(-(\log x)^{3/5} (\log\log\log x)^{-1/5}\right)\right).$$
Sei $\Theta := \sup\{\beta \mid \zeta(\beta + i\gamma) = 0 \text{ für ein } \gamma \in \mathbb{R}\}$. Von einem Beweis, dass $\Theta < 1$ sein könnte, ist man also nach wie vor weit entfernt.

Evidenz für die (RH):

1) Die ersten 10 Milliarden Nullstellen von ζ in S haben Realteil $\frac{1}{2}$.
2) Fast alle Nullstellen liegen nahe der $(\mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2})$-Geraden:
   Für über 99% der Nullstellen $\varrho = \beta + i\gamma$ in S gilt $|\beta - \frac{1}{2}| \leq \frac{8}{\log|\varrho|}$.
3) über 40% aller Nullstellen liegen auf $(\mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2})$.
4) Es gibt probabilistische Argumente für die (RH) mit der μ-Fkt. (s.u.)
5) "Symmetrie" der Primzahlen: Wäre die (RH) falsch, wären die PZen seltsam/unnatürlich verteilt.

Es gibt – außer der genannten elementaren – viele Umformulierungen der (RH). Eine Auswahl:

1) Xian-Jin Li: (RH) $\Leftrightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}: \lambda_n \geq 0$,

wobei $\lambda_n = \sum_{\varrho} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{\varrho}\right)^n\right) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^n}{ds^n} \left(s^{n-1} \log \xi(s)\right)\Big|_{s=1}$

2) Hardy + Littlewood: (RH) $\Leftrightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!\,\zeta(2k+1)} = O(x^{-1/4})$ für $x \to \infty$

3) Redheffer (1977): (RH) $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, C(\varepsilon) > 0: \left|\det(A(n))\right| < C(\varepsilon) \cdot n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$,

wo $A(n) \in \{0,1\}^{n \times n}$ def. durch $A(i,j) = \begin{cases} 1, & j = 1 \text{ oder } i \mid j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

4) Lagarias (2002): ist $\sigma(n) := \sum_{d \mid n} d$, $H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, so gilt:

(RH) $\Leftrightarrow$ $\sigma(n) \leq H_n + \exp(H_n) \log H_n$.

Wir bringen noch den Beweis für (0), der analytischen Fortsetzung von ζ für $\mathrm{Re}\, s > 0$, $s \neq 1$:

Für $\mathrm{Re}\, s > 1$ folgt aus der Formel für partielle Summation (s.o.):

$$\sum_{n \leq x} 1 \cdot \frac{1}{n^s} \underset{\text{part. } \Sigma}{=} \frac{\lfloor x \rfloor}{x^s} + s \int_1^x \underbrace{\frac{\lfloor t \rfloor}{t^{s+1}}}_{= t^{-s} - \{t\} t^{-s-1}} dt$$

$$= \frac{\lfloor x \rfloor}{x^s} + \frac{s}{s-1}\left(1 - x^{1-s}\right) - s \int_1^{\infty} \frac{\{t\}}{t^{s+1}} dt$$

$$\xrightarrow{x \to \infty} \underbrace{\frac{s}{s-1}}_{\substack{\text{einfacher} \\ \text{Pol bei } s=1 \text{ mit} \\ \text{Residuum } 1}} - s \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{\{t\}}{t^{s+1}} dt}_{\text{kgt. für } \mathrm{Re}\, s > 0}$$

Diese Formel zeigt die anal. Forts. von ζ für $\mathrm{Re}\, s > 0$, $s \neq 1$. $\square$

Bem.: Partielle Summation: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_{>0})$.

Dann ist

$$\sum_{n\le x} a_n f(n) = A(x) f(x) - \int_1^x A(t) f'(t)\,dt,$$

wo

$$A(t) := \sum_{n\le t} a_n.$$

Bew.:
$$\int_1^x A(t) f'(t)\,dt = \int_1^x \sum_{\substack{n\le t\\ \rightsquigarrow t\ge n}} a_n f'(t)\,dt = \sum_{n\le x} a_n \underbrace{\int_n^x f'(t)\,dt}_{=f(x)-f(n)}$$

$$= A(x) f(x) - \sum_{n\le x} a_n f(n).$$ $\square$

Mit dem Studium von P-zen (also auch mit der (RH)) ist auch die Möbius-Fkt. eng verbunden:

Es ist

$$\mu(n) := \begin{cases} 1, & n=1, \\ 0, & \text{falls } \exists p\in\mathbb{P}: p^2 \mid n \\ (-1)^k, & \text{sonst, wenn } n = p_1\cdots p_k \text{ gilt, die } p_i \in \mathbb{P} \text{ p.w.v.} \end{cases}$$

Es zeigt sich, dass $\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$ für $\operatorname{Re} s > 1$ gilt.

Die Funktion $M(x) := \sum_{n\le x} \mu(n)$ heißt Mertens-Funktion, und es gilt

$$(RH) \iff M(x) = \mathcal{O}(x^{1/2+\varepsilon}) \text{ für alle } \varepsilon > 0.$$

Die Mertens-Vermutung $|M(x)| \le \sqrt{x}$ wurde 1985 widerlegt (Odlyzko & te Riele)