Ungelöste Probleme der Zahlentheorie

Teil 3: Das Waring-(Goldbach-)Problem

Vermutung von E. Waring (1770):

Jede natürliche Zahl ist Summe von 4 Quadraten (4-Quadrate-Satz), 9 Kuben, 19 4-ten Potenzen usw.,

genau:

$\forall k \geq 2\ \exists g(k) \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}:$

$\exists \ell \leq g(k)\ \exists m_1, \dots, m_\ell : \quad n = m_1^k + \dots + m_\ell^k,$

d.h. jedes n schreibt sich als Summe von höchstens $g(k)$ vielen k-ten Potenzen. Dabei soll $g(k)$ minimal sein, d.h. $g(k) := \min\{s \mid \forall n \in \mathbb{N}\ \exists \ell \leq g(k)\ \exists m_1, \dots, m_\ell : n = m_1^k + \dots + m_\ell^k\}$.

Vermutung: $\forall k \geq 2: g(k) < \infty$.

Diese Vermutung wurde 1909 von D. Hilbert bewiesen und heißt seitdem Satz von Waring-Hilbert. Seitdem ist das Waringsche Problem gelöst. Einen elementaren Beweis zeigte 1942 Y. Linnik nach Ergebnissen von L. Shnirel'man. Ungelöst ist die genaue Größe von $g(k)$ für allgemeines k.

Der 4-Quadrate-Satz zeigt $g(2) = 4$.

Dass $g(3) = 9$ ist, zeigten Wieferich/Kempner 1909/12.

Tatsächlich benötigen nur die Zahlen 23 und 239 genau 9 Kuben zur Darstellung.

Man vermutet heute, dass man für Zahlen $\in [240, 454]$ 8 Kuben und für Zahlen $\in [455, 8.042]$ nur 7 Kuben und für Zahlen $\in [8.043, 1.290.740]$ nur 6 Kuben benötigt, sowie, dass alle hinreichend großen Zahlen nur 4 Kuben benötigen.

Die vermuteten Werte für $g(k)$ wurden bislang für $k \leq 7$ bestätigt, nämlich $\underset{(1992)}{g(4) = 19}$, $g(5) = 37$, $g(6) = 73$, $g(7) = 143$.

Über natürliche Zahlen, die Summe zweier Kuben sind, weiß man folgendes: [Thm. 412 in Hardy/Wright]

1. für jedes $k \in \mathbb{N}$ gibt es natürliche Zahlen mit mind. k vielen Darstellungen als Summe zweier Kuben,
2. für fast alle natürlichen Zahlen, die Summe zweier Kuben sind, ist diese Darstellung eindeutig.

In diesem Zusammenhang die berühmte Anekdote über Hardy und Ramanujan: Hardy besuchte den schwerkranken Ramanujan im Krankenhaus und erwähnte, dass er mit dem Taxi Nr. $1729 = 7 \cdot 13 \cdot 19$ gekommen sei, eine völlig langweilige Zahl. Dem entgegnete Ramanujan, dass 1729 sehr wohl eine interessante Zahl sei, nämlich die kleinste Zahl, die auf zweierlei Arten als Summe zweier Kuben geschrieben werden kann:

$$1729 = 12^3 + 1^3 = 10^3 + 9^3.$$

Aufgrund dieser Anekdote nennt man die kleinste natürliche Zahl, die auf k Arten als Summe von zwei Kuben geschrieben werden kann, auch die <u>k-te Taxizahl</u>. ("taxicab number")

$\leadsto$ taxicab $(1) = 2$, taxicab $(2) = 1729$, taxicab $(3) = 87539319$, bis taxicab (6) sind diese Zahlen bekannt.

Für die Darstellungsanzahl im Waring-Problem, nämlich

$$R_{k,s}(n) := \# \{ (x_1, \ldots, x_s) \in \mathbb{N}^s \mid n = x_1^k + \ldots + x_s^k \},$$

zeigten Hardy & Littlewood 1919/1920 folgenden Satz (mit der Kreismethode):

Satz 1: Sei $k \geq 2$. Ist $s \geq 2^k + 1$, dann ist

$$R_{k,s}(n) \sim \frac{\Gamma^s(1+\frac{1}{k})}{\Gamma(\frac{s}{k})} \cdot \mathfrak{S}_{k,s}(n) \cdot n^{\frac{s}{k}-1} \quad \text{für } n \to \infty,$$

wobei Γ die Gammafunktion bezeichnet, und

$\mathfrak{S}_{k,s}(n) \geq \underbrace{c_1(k,s)}_{\text{eine Konstante}} > 0$ die singuläre Reihe des Waring-Problems.

Somit ist für die angegebenen k und s die Darstellungsanzahl $R_{k,s}(n)$ positiv für alle großen n.

Setzt man $G(k) := \min\{s \in \mathbb{N} \mid \exists N_0 \, \forall n \geq N_0 : \exists x_1, \dots, x_s \in \mathbb{N}_0 : n = x_1^k + \dots + x_s^k\}$, (endl. nach Waring-Hilbert)

so folgt aus diesem Satz also $G(k) \leq 2^k + 1$. [klar: $\forall k: G(k) \leq g(k)$]
Man kennt die schärfere Schranke $G(k) \leq \log k \cdot (k + o(1))$ für $k \to \infty$.

Beachte die untere Schranke für s, eine solche muss es geben:
Denn für $s = 2$ und $k \geq 3$ beinhaltet das Waring-Problem genau das Fermat-Problem, nämlich die Frage, ob k-te Potenzen die Summe zweier k-ter Potenzen sind für $k \geq 3$.
Dies kann mit Nein beantwortet werden.
(Das Fermat-Problem wurde 1995 von A. Wiles und R. Taylor gelöst $\rightsquigarrow$ „Satz von Fermat-Wiles-Taylor")

Ist $\tilde{G}(k)$ das kleinste s, mit dem die Asymptotik im Satz 1 gilt, so gilt:
[Ford 1995]: $\tilde{G}(k) \leq k^2(\log k + \log\log k + O(1))$ für $k \to \infty$.

für $s=2$, $k=1$ ist dies das ungelöste binäre Goldbach-Problem

Erlaubt man im Waring-Problem als k-te Potenzen nur Primzahlpotenzen, erhält man das Waring-Goldbach-Problem. Unter welchen Voraussetzungen dieses lösbar ist, besagt der folgende Satz von Vinogradov-Hua (1937/38): (in der aktuellen Version)

Satz 2: Seien $k, s, n \in \mathbb{N}$, und

$$R^*_{k,s}(n) := \#\{(p_1, \dots, p_s) \in \mathbb{P}^s \mid n = p_1^k + \dots + p_s^k\}.$$

Sei

$$s \geq \begin{cases} 2^k + 1, & 1 \leq k \leq 5, \\ \frac{7}{8} \cdot 2^k + 1, & 6 \leq k \leq 8, \\ k^2 \cdot (\log k + \log\log k + O(1)), & k > 8. \end{cases}$$

Dann ist

$$R^*_{k,s}(n) \sim \frac{\Gamma^s(1+\frac{1}{k})}{\Gamma(\frac{s}{k})} \cdot \mathfrak{S}^*_{k,s}(n) \frac{n^{s/k-1}}{(\log n)^s} \text{ für } n \to \infty$$

und der singulären Reihe $\mathfrak{S}^*_{k,s}(n) \geq c_2(k,s) > 0$

falls $n \equiv s \mod K(k)$, wobei $K(k) := \prod_{(p-1)\mid k} p^{\gamma(k,p)}$,

$p^\theta \| k :\Leftrightarrow p^\theta \mid k \,\&\, p^{\theta+1} \nmid k$

und $\gamma(k,p) := \begin{cases} \theta + 2, & p = 2,\ 2 \mid k, \\ \theta + 1, & \text{sonst}, \end{cases}$ wenn $p^\theta \| k$.

Korollar 1 (für PZquadrate, $k=2$): Jedes hinreichend große $n \equiv 5\ (24)$ ist Summe von 5 PZquadraten.

[Denn für $k=2$, $s=5$ ist $K(k) = 2^3 \cdot 3^1 = 24$.]

Korollar 2 (für PZkuben, $k=3$): Jede hinreichend große ungerade Zahl ist Summe von 9 PZkuben.

[Denn für $k=3$, $s=9$ ist $K(k) = 2$.]

Wir zeigen im Zusammenhang mit dem Waring-Problem noch folgendes:

Satz 3:

Sei $k \geq 2$ und $T(N)$ die Anzahl der $n \leq N$, die als Summe von $k-1$ vielen nichtnegativen k-ten Potenzen geschrieben werden können.

(a) Dann ist $T(N) < N$ für alle $N \geq N_0(k)$.

(b) Es folgt: $G(k) \geq k$.

Bew.: Zu (a): Für $N \geq 1$ ist $\#\{y = a^k \mid a \in \mathbb{N}_0,\ a^k \leq N\}$
$$\leq 1 + N^{1/k} \leq 2 \cdot N^{1/k},$$
also
$$T(N) = \#\{n \leq N \mid n = a_1^k + \dots + a_{k-1}^k\} \leq \#\{(a_1^k, \dots, a_{k-1}^k) \mid a_i^k \leq N\}$$
$$\leq (2N^{1/k})^{k-1} < N \quad \text{für alle} \quad N \geq N_0(k).$$

Zu (b): Ist $T(N) < N$, ex. ein $n \leq N$, das nicht Summe von $k-1$ vielen k-ten Potenzen ist, dieses ist mindestens $N - (2N^{\frac{1}{k}})^{k-1}$ $\left(> \frac{N}{2} \text{ für } N \geq N_1\right)$.
Es folgt: $G(k) \geq k$. $\square$

↳ es gibt immer bel. große Ausnahmezahlen n

Satz 4: Es ist
$$g(k) \geq \left\lfloor \left(\tfrac{3}{2}\right)^k \right\rfloor + 2^k - 2.$$
Bem.: Man vermutet "=".

Bew.: Es ist $n := q \cdot 2^k - 1 = 2^k \cdot \left[\left(\tfrac{3}{2}\right)^k\right] - 1 < 2^k \cdot \left(\tfrac{3}{2}\right)^k = 3^k$,

d.h. in $n = x_1^k + \dots + x_s^k$ kommen nur $x_j \in \{0, 1, 2\}$ vor.
Die Zahl 2^k kommt als Summand höchstens $\left[\left(\tfrac{3}{2}\right)^k\right] - 1$ mal vor.
Die kleinste Summandenzahl erreicht man, wenn möglichst oft 2^k verwendet und der Rest in Einsen aufgeteilt wird: Es ist
$n - 2^k \cdot \left(\left\lfloor \left(\tfrac{3}{2}\right)^k \right\rfloor - 1\right) = 2^k - 1$, die Anzahl der Summanden ist also mindestens $\left\lfloor \left(\tfrac{3}{2}\right)^k \right\rfloor - 1 + 2^k - 1 = \left\lfloor \left(\tfrac{3}{2}\right)^k \right\rfloor + 2^k - 2$. $\square$