Ungelöste Probleme der Zahlentheorie

Teil 12: Die Lindelöf-Vermutung

[Literatur: J. Brüdern, Kap. 4]
Stellen nur Ergebnisse vor, Beweise s. dort

Untersucht werden die Werte der ζ-Funktion auf der/nahe der kritischen Gerade $\frac{1}{2}+it$, $t\in\mathbb{R}$, insbesondere im Hinblick auf die Riemannsche Vermutung.
Daher ist man auch an einer näherungsweisen Berechnung der ζ-Fkt. dort interessiert, wofür wir folgende Möglichkeiten nennen:

1.) Die Dirichletreihe $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ konvergiert nur für $\mathrm{Re}\, s>1$, die ersten Terme liefern aber eine gute Approximation an $\zeta(s)$ für s im kritischen Streifen:

Satz (1): Sei $\sigma_0>0$. Dann gilt für $s=\sigma+it$ mit $\sigma\geq\sigma_0$, $|t|\leq 4x$:

$$\zeta(s)=\sum_{n\leq x} n^{-s}-\frac{x^{1-s}}{1-s}+O(x^{-\sigma}).$$

2.) Für $\sigma<0$ lässt sich $\zeta(s)$ ebenfalls durch eine Dirichletreihe darstellen: Schreiben wir die Funktionalgleichung als $\zeta(s)=\Delta(s)\zeta(1-s)$ mit $\Delta(s):=\frac{(2\pi)^s}{2\cos(\frac{\pi s}{2})\Gamma(s)}$, für $\mathrm{Re}\, s<0$ gilt also $\zeta(s)=\Delta(s)\sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1}$, und wie in 1.) wird ein geeigneter Abschnitt dieser Reihe dann $\zeta(s)$ approximieren.

Beide Näherungen lassen sich dann zu folgendem Ergebnis kombinieren (bekannt als "approximate functional equation"):

Satz (2): Sei $0<\sigma<1$, $2\pi xy=t$ mit $x\geq 1$, $y\geq 1$. Dann gilt

$$\zeta(s)=\sum_{n\leq x} n^{-s}+\Delta(s)\sum_{n\leq y} n^{s-1}+O\left(\left(x^{-\sigma}+t^{\frac{1}{2}-\sigma}y^{\sigma-1}\right)\log t\right).$$

Diese Näherung ist gut: Für $s=\frac{1}{2}+it$, $t>2$, $x=y=\sqrt{\frac{t}{2\pi}}$ erhalten wir

$$\zeta(\tfrac{1}{2}+it)=\sum_{n\leq x} n^{-\frac{1}{2}-it}+\Delta(\tfrac{1}{2}+it)\sum_{n\leq x} n^{-\frac{1}{2}+it}+O(t^{-\frac{1}{4}}\log t)$$

(je $\approx\sqrt{t}$ viele Terme)

als Approximation für ζ auf der kritischen Gerade.

Für alle $\sigma \in \mathbb{R}$ kann man zeigen: $\zeta(\sigma + it) = O(t^k)$ für positives k, somit ist die folgende Definition sinnvoll:

<u>Def.:</u> $\mu(\sigma) := \inf\{c \in \mathbb{R};\ |\zeta(\sigma+it)| = O(t^c)\} = \limsup\limits_{t\to\infty} \dfrac{\log|\zeta(\sigma+it)|}{\log t}$,

ist also stets endlich.

Diese Zahl (die Notation ist historisch bedingt und hat nichts mit der Möbiusfunktion zu tun) beschreibt also das Wachstumsverhalten der ζ-Werte auf der vertikalen Geraden $\mathrm{Re}\, s = \sigma$.

- Für $\sigma > 1$ ist $\mu(\sigma) = 0$, denn mit $|\zeta(\sigma+it)| \le \zeta(\sigma)$ folgt einerseits $\mu(\sigma) \le 0$, mit $|\zeta(\sigma+it)|^{-1} \le \sum n^{-\sigma} = \zeta(-\sigma)$ andererseits $\mu(\sigma) \ge 0$.

- Für $\sigma < 0$ ist $\mu(\sigma) = \frac{1}{2} - \sigma$, denn die Stirlingsche Formel $\Gamma(s) \sim \left(\frac{s}{e}\right)^s \cdot \left(\frac{2\pi}{s}\right)^{1/2}$ zeigt $|\Delta(\sigma+it)| = \left|\frac{t}{2\pi}\right|^{\frac{1}{2}-\sigma}\left(1 + O\left(\frac{1}{|t|}\right)\right)$, und die Funktionalgleichung liefert die Beh.

- Ferner $\mu(1) = 0$ und $\mu(0) = \frac{1}{2}$.

- Für $0 < \sigma < 1$ zeigt Satz (2), wenn $x = y = \sqrt{\frac{t}{2\pi}}$ gesetzt wird:
  $\zeta(\sigma+it) = O\left(\left(x^{1-\sigma} + |t|^{\frac{1}{2}-\sigma} y^{\sigma}\right)\log t\right) = O\left(|t|^{\frac{1}{2}(1-\sigma)} \log|t|\right)$,
  dies zeigt: $\mu(\sigma) \le \frac{1}{2}(1-\sigma)$ für $0 \le \sigma \le 1$.

- <u>Satz (3):</u> $\mu(\sigma)$ ist konvex, also ist $\forall \sigma \in \mathbb{R}$: $\mu(\sigma) \ge \max\{0, \frac{1}{2} - \sigma\}$.
  (Bew. mit Satz (1))

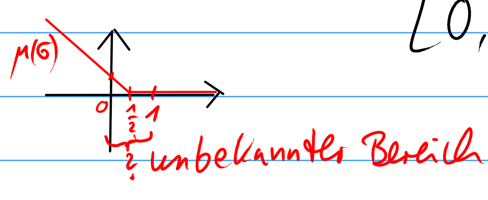
Die <u>Lindelöf-Vermutung</u> besagt nun, dass hier Gleichheit herrschen sollte, dass also gilt:

$$\mu(\sigma) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \sigma, & 0 \le \sigma \le \frac{1}{2}, \\ 0, & \frac{1}{2} \le \sigma \le 1, \end{cases}$$

oder äquivalent formuliert:

$$\mu\left(\tfrac{1}{2}\right) = 0,$$

wegen der Konvexität von μ.



Bisher bekannt [Kolesnik 1985]: $\mu(\frac{1}{2}) \leq 0.162$

Aufgrund der Def. von $\mu(\sigma)$ ist die Lindelöf-Vermutung $\mu(\frac{1}{2}) = 0$ äquivalent zu

$$\zeta(\tfrac{1}{2}+it) = O(t^{\varepsilon}) \text{ für alle } \varepsilon > 0.$$

Es gibt eine Reihe weiterer äquivalenter Umformulierungen, die u.a. in Zusammenhang mit anderen ungelösten Problemen stehen.

Zunächst gilt:

Satz (4): Für $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$ ist $\mu(\sigma) = 0$ genau dann, wenn

$$\forall k \in \mathbb{N}: \quad (\otimes) \quad \frac{1}{T}\int_1^T |\zeta(\sigma+it)|^k \, dt = O(T^{\varepsilon}) \text{ gilt.}$$

Somit: Lindelöf $\Leftrightarrow$ $\otimes$ mit $\sigma = \frac{1}{2}$, alle $k \in \mathbb{N}$

bzw. Lindelöf $\Leftrightarrow$ $\otimes$ mit $\sigma > \frac{1}{2}$, alle $k \in \mathbb{N}$ (wegen Konvexität).

Eine weitere äquivalente Aussage ist

Satz (5): Lindelöf $\Leftrightarrow$ für alle $\sigma > \frac{1}{2}$, $T > 1$ ist $N(\sigma, T+1) - N(\sigma, T) = o(\log T)$,

wobei $N(\sigma, T) := \#\{\rho \in \mathbb{C};\ \sigma < \operatorname{Re}\rho,\ 0 < \operatorname{Im}\rho \leq T,\ \zeta(\rho) = 0\}$.

Damit gilt: RH $\Rightarrow$ Lindelöf, aber nicht $\Leftarrow$, die Lindelöf-Vermutung ist sogesehen deutlich schwächer als die Riemannsche Vermutung!

Die Ausdrücke $\int_1^T |\zeta(\sigma+it)|^k \, dt$ in Satz (4) heißen Potenzmomente der ζ-Fkt. und ihre Abschätzung ist daher von speziellem Interesse, aber auch u.a. im Zusammenhang mit dem Dirichletschen Teilerproblem:

Die Teilerfunktion $d(n) := \sum_{d|n} 1 = \sum_{\substack{n_1, n_2 \\ n_1 \cdot n_2 = n}} 1$ kann für $k \in \mathbb{N}$

verallgemeinert werden zu $d_k(n) := \sum_{\substack{n_1, \ldots, n_k \\ n_1 \cdots n_k = n}} 1$, also $d_2 = d$, $d_{k+1} = \mathbb{1} * d_k$.

Diese Funktionen unterliegen starken Schwankungen, ihre mittlere Ordnung hingegen können mit asymptotischen Formeln beschrieben werden: Mit elementaren Methoden kann gezeigt werden, dass

$$\boxtimes \quad \sum_{n \leq x} d_k(n) = x\, P_k(\log x) + O\left(x^{1-\frac{1}{k}} (\log x)^{k-2}\right) \text{ gilt,}$$

wobei $P_k(z)$ ein Polynom vom Grad $k-1$ bezeichnet, das auch explizit angegeben werden kann (z.Bsp. $P_2(z) = z + 2\gamma - 1$, γ = Eulersche Konst.).

Das <u>Dirichletsche Teilerproblem</u> bezeichnet nun die Frage nach dem bestmöglichen Fehlerterm in dieser Approximation.

Dabei kommen (wegen $\zeta(s)^k = \sum_{n=1}^{\infty} d_k(n) n^{-s}$ für $\mathrm{Re}\, s > 1$) genau die Potenzmomente der ζ-Fkt. mit ins Spiel:

<u>Satz (6)</u>: Sei $0 < \sigma < 1$, $x \geq 2T^{k/2} \geq 1$, dann gilt:

$$\sum_{n \leq x} d_k(n) = x\, P_k(\log x) + O\left(\frac{x^{1+\varepsilon}}{T} + x^{\sigma} \cdot \int_0^T \frac{|\zeta(\sigma + it)|^k}{|\sigma + it|} \, dt\right).$$

Mit $T = x^{2/(k+4)}$, $\zeta(\tfrac{1}{2} + it) = O(t^{1/4 + \varepsilon})$ erhalten wir für diesen Fehlerterm dann

$$O\left(x^{1 - \frac{2}{k+4} + \varepsilon}\right).$$

Damit sind also die Potenzmomente von ζ und gute Abschätzungen für möglichst kleines σ entscheidend im Dirichletschen Teilerproblem.

Dies steht wegen Satz (4) dann in engem Zusammenhang mit der Lindelöf-Vermutung: Lindelöf $\Leftrightarrow$ Fehlerterm $O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$ für alle $k \geq 2$ im Dirichletschen Teilerproblem $\boxtimes$.

Eine damit verwandte, zur Lindelöf-Vermutung äquivalente Aussage ist:

$$\text{Lindelöf} \iff \frac{1}{T}\int_1^T |\zeta(\sigma+it)|^{2k}\,dt \sim \sum_{n=1}^{\infty} d_k^2(n)\, n^{-2\sigma}$$

$$\iff \zeta^k(s) = \sum_{n\le t^\delta} \frac{d_k(n)}{n^s} + O(t^{-\lambda}),\quad \delta,\lambda>0.$$

Die bewiesene Schranke $\frac{1}{T}\int_0^T |\zeta(\sigma+it)|^4\,dt = O(T^\varepsilon)$ im Bsp. $k=4$ zeigt mit $T=\frac{1}{2}x^{1/2}, \sigma=\frac{1}{2}$, dann: $\sum_{n\le x} d_4(n) = x P_4(\log x) + O(x^{1/2+\varepsilon})$.

Für die Funktion $d(n)=d_2(n)$ kann so nur

$$\sum_{n\le x} d(n) = x\log x + (2\gamma-1)x + O(x^{1/3+\varepsilon})$$

gezeigt werden. An Verbesserungen arbeitet die aktuelle Forschung.

Eine klassische Methode zur Abschätzung von ζ-Potenzmomenten besteht darin, die Abschätzung quadratischer Momente von Dirichletpolynomen $\sum_n a_n n^{it}$ mit der approximate functional equation zu verbinden. Damit kann etwa

$$\int_0^T |\zeta(\tfrac{1}{2}+it)|^2\,dt = T\log T + O(T) \quad\text{und}\quad \int_0^T |\zeta(\tfrac{1}{2}+it)|^4\,dt = O(T(\log T)^8)$$

bewiesen werden (ist bisher aber stark verbessert worden).

In jüngster Zeit haben sich einige Verbesserungen bei der Abschätzung von ζ-Potenzmomenten ergeben.

Ein Beispiel:

[K. Soundararajan, 2008]: RH $\Rightarrow$

$$T(\log T)^{k^2} \ll \int_0^T |\zeta(\tfrac{1}{2}+it)|^{2k}\,dt \ll T(\log T)^{k^2+\varepsilon}.$$