

Übungen zur Vorlesung
Elementare Zahlentheorie
SoSe 2006

Blatt 11

Abgabe: gar nicht

Aufgabe 1.

(a) Sei f eine multiplikative zahlentheoretische Funktion.

Gilt $\lim_{p^k \rightarrow \infty} f(p^k) = 0$, wobei p^k die Folge der Primzahlpotenzen durchläuft,
so folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = 0$.

(b) $\forall \varepsilon > 0 : d(n) = O(n^\varepsilon)$, wobei die O -Konstante von ε abhängt.

Aufgabe 2.

Zeige: Die Zahlen $\lfloor (1 + \sqrt{2})^n \rfloor$, $n \in \mathbb{N}_0$, sind abwechselnd ungerade und gerade. Hinweis: Betrachte die Folgen $a_n = (\sqrt{2} + 1)^n$ und $b_n = (\sqrt{2} - 1)^n$.

Aufgabe 3.

Zeige: Die Formel $\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \ln x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right)$ kann nicht zur Formel

$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \ln x + \gamma + o\left(\frac{1}{x}\right)$ verschärft werden.

Aufgabe 4. Magische Quadrate (Verfahren von D. N. Lehmer, 1929)

Sei $n \geq 2$. Die Zahlen $0, 1, 2, \dots, n^2 - 1$ werden auf die n^2 Einträge einer $n \times n$ -Matrix verteilt. Jede solche Matrix heißt **Quadrat der Ordnung n** . Ein Quadrat der Ordnung n heißt **magisch**, wenn alle n Zeilensummen und alle n Spaltensummen den Wert

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n^2-1} j = \frac{n(n^2 - 1)}{2}$$

haben. Seien $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}$, und

$$q : \{0, 1, \dots, n^2 - 1\} \rightarrow \{0, \dots, n - 1\} \times \{0, \dots, n - 1\}, \\ j \mapsto (x_j, y_j),$$

$$\text{wobei} \quad x_j \equiv a + c j + e \left\lfloor \frac{j}{n} \right\rfloor \pmod{n},$$

$$\text{und} \quad y_j \equiv b + d j + f \left\lfloor \frac{j}{n} \right\rfloor \pmod{n}.$$

Zeige: Falls $(cf - de, n) = (c, n) = (e, n) = (d, n) = (f, n) = 1$, liefert die Zuordnung q ein magisches Quadrat der Ordnung n .