

Übungen zur Vorlesung
Elementare Zahlentheorie
SoSe 2006

Blatt 9

Abgabe: Donnerstag, den 13.07.2006, zu Beginn der Vorlesung

Aufgabe 1.

Beweise die beiden Ergänzungsgesetze für das Jacobi-Symbol.

Aufgabe 2.

Zeige:

- (a) Für jedes $n \geq 3$ gibt es ein pythagoräisches Tripel (x, y, z) , so daß n gleich einer der Zahlen x, y oder z ist.
- (b) Ist n nicht als Summe zweier Quadrate darstellbar, so kann sie auch nicht als Summe von zwei Quadraten rationaler Zahlen dargestellt werden.

Aufgabe 3.

Zeige:

- (a) Sei n auf zwei verschiedene Arten in eine Summe von zwei Quadraten zerlegt:

$$n = s^2 + t^2 = u^2 + v^2, \quad s \geq t > 0, \quad u \geq v > 0, \quad s > u.$$

Dann ist $d := (su - tv, n)$ ein nichttrivialer Teiler von n .

- (b) Ist $n = pq$ mit $p, q \equiv 1 \pmod{4}$, so läßt sich n auf zwei verschiedene Arten als Summe von zwei Quadraten schreiben.

* Liefert (b) dann ein geeignetes Faktorisierungsverfahren?

Aufgabe 4.

Zeige:

- (a) Die diophantische Gleichung $x^4 - y^4 = z^2$ hat keine Lösung in natürlichen Zahlen x, y und z .
- (b) Die Fläche eines pythagoräischen Dreiecks (rechtwinklig mit ganzzahligen Seitenlängen) kann nie eine Quadratzahl sein.