

Übungen zur Vorlesung
Einführung in die additive Zahlentheorie – WS 2007/08
Blatt 9

Abgabe: Dienstag, den 08.01.2008, vor der Vorlesung

Aufgabe 1.

Zeige, dass sich die natürlichen Zahlen 23 und 239 nicht als Summe von höchstens 8 Kuben schreiben lassen.

Aufgabe 2.

- (a) Sei $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\frac{1}{n} \sum_{m \leq n} |f(m)| \leq Q$ für ein $Q > 0$ gegeben, und sei $H \geq 1$. Zeige:

$$\#\{m \leq n; |f(m)| > QH\} < \frac{n}{H}.$$

- (b) Der Inhalt einer Keksdose mit $2n + 1$ vielen Weihnachtsplätzchen ist von einer Kaffeerunde mit $n \geq 2$ vielen Personen aufgegessen worden. Überlege, dass weniger als die Hälfte der Beteiligten mehr als 5 Kekse gegessen haben, und dass jemand mindestens 3 Kekse hatte.

Aufgabe 3.

Zeige, dass aus der Aussage

$$\#\{m \leq n; 2|m, m \neq p_1 + p_2\} \ll \frac{n}{\log^2 n}$$

das ternäre Goldbach–Problem für alle hinreichend großen ungeraden n folgt.

Aufgabe 4.

Konstruiere Mengen $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{N}_0$ mit $0 < \sigma(\mathcal{A}), \sigma(\mathcal{B}) < \frac{1}{2}$ und

- (a) $\sigma(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = \sigma(\mathcal{A}) + \sigma(\mathcal{B}),$
(b) $\sigma(\mathcal{A} + \mathcal{B}) > \sigma(\mathcal{A}) + \sigma(\mathcal{B}).$