Kurs über Lineare Gleichungssysteme

PD Dr. Karin Halupczok

Mathematisches Institut
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/halupczok/diverses.html

karin.halupczok@math.uni-freiburg.de

DHBW Villingen-Schwenningen
Oktober/November 2009

Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Beispiele und Lösungsmengen

Die Dreiecksform

Beispiele für LGS in Dreiecksform

Der Gauß-Algorithmus

LGS mit Parametern

Motivation

Beispiel: Zwei Maschinen M_1 und M_2 können die Produkte P_1 und P_2 herstellen. Die Fertigungszeiten in Minuten sind wie folgt gegeben:

	P_1	P_2
M_1	3.2	4.0
M_2	1.2	2.6

Die Betriebszeit pro Maschine beträgt 240 Minuten. Wieviel Stück von jedem Produkt können in dieser Zeit hergestellt werden?

Nennt man die Stückzahlen der Produkte x_1 und x_2, so erhält man dafür die beiden folgenden Bedingungen:

$$\begin{aligned} 3.2\,x_1 + 4.0\,x_2 &= 240 \\ 1.2\,x_1 + 2.6\,x_2 &= 240 \end{aligned}$$

Gesucht sind nun alle Zahlenpaare für (x_1, x_2), die diese beiden Gleichungen *gleichzeitig* lösen. Wir werden die Lösung solcher Gleichungssysteme nun genau untersuchen.

Was ist ein LGS?

Ein lineares Gleichungssystem (kurz: LGS) ist ein System aus m linearen Gleichungen in n Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in der Form

$$\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}\,x_1 + & a_{1,2}\,x_2 & + & \ldots + & a_{1,n}\,x_n & = & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{m,1}\,x_1 + & a_{m,2}\,x_2 & + & \ldots + & a_{m,n}\,x_n & = & b_m \end{array}$$

Die Zahl $a_{i,j}$ steht also in Zeile Nr. i und ist die Vorzahl bei x_j, man nennt eine solche Vorzahl auch einen *Koeffizienten*.

Die Zeilen werden manchmal am Rand des LGS mit römischen Ziffern durchnumeriert.

Kurzschreibweise für ein LGS

Man verwendet die folgende Kurzschreibweise für ein LGS:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right)$$

Werden die Zahlen b_i weggelassen, so nennt man dieses rechteckige Zahlenschema der $a_{i,j}$ auch die *Koeffizientenmatrix*, oder kurz die *Matrix* des LGS.

Beispiel für ein LGS

Gilt $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$, so heißt das LGS *homogen*, ansonsten *inhomogen*.

Beispiel für ein LGS:

$$\begin{aligned} 2\,x_1 + 3\,x_2 &= -1 \\ 4\,x_1 + x_2 &= 6 \end{aligned}$$

In Kurzschreibweise:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

Dies ist ein Beispiel für ein inhomogenes LGS.

Was ist eine Lösung eines LGS?

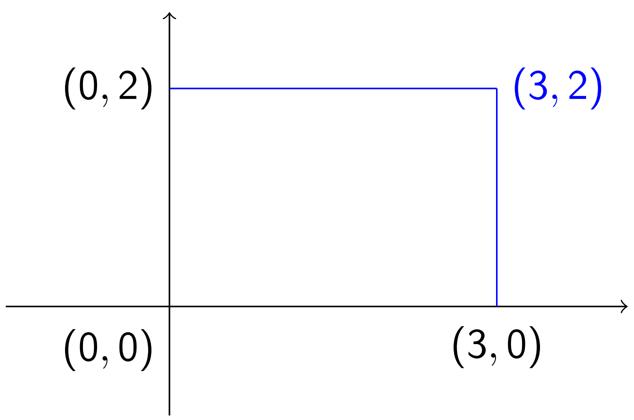
Gesucht sind Lösungen für $x_1, x_2, \ldots, x_n$, die alle m Gleichungen simultan lösen, d. h. n reelle Zahlen, für die Gleichung Nr. I gilt *und* Gleichung Nr. II *und* Gleichung Nr. III...

Man faßt die n Komponenten einer Lösung zusammen mit der Notation
$$\vec{x}^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$
Man nennt dies ein *n-Tupel* oder auch einen *Zeilenvektor*.

Die Menge aller Zeilenvektoren heißt
$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$
und ist identisch mit dem n-dimensionalen Anschauungsraum.

Veranschaulichung im Koordinatensystem für $n = 2$

Für $n = 2$ kann jedes 2-Tupel $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ als Punkt mit den Koordinaten x_1 und x_2 im Koordinatensystem der Zeichenebene veranschaulicht werden.



Die Vektoren entsprechen damit den Punkten im Anschauungsraum.

Über den $\mathbb{R}^n$

Der $\mathbb{R}^2$ ist also nichts anderes als $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, und entsprechend gilt auch

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ mal}}.$$

Man kann mit Zeilenvektoren, die Punkte im Anschauungsraum darstellen, problemlos rechnen: So ist $\vec{x}^T + \vec{y}^T$ erklärt durch

$$\vec{x}^T + \vec{y}^T = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

und das λ-fache eines Vektors $\vec{x}^T$, also $\lambda \vec{x}^T$, ist erklärt durch

$$\lambda \vec{x}^T = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Beispiele und Lösungsmengen

Die Dreiecksform

Beispiele für LGS in Dreiecksform

Der Gauß-Algorithmus

LGS mit Parametern

Beispiel 1

Die Lösungsmenge eines LGS ist eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Ein LGS hat stets keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen.

Beispiel für ein LGS ohne Lösung:

$$\begin{array}{rcr} 2x_1 + 3x_2 & = & -1 \\ 4x_1 + 6x_2 & = & 3 \end{array}$$

Die beiden Gleichungen widersprechen sich, daher ist $\mathbb{L} = \emptyset$.

Beispiel 2

Beispiel für ein LGS mit genau einer Lösung:

$$\left\{\begin{array}{rcr} 2x_1 + 3x_2 & = & -1 \\ 4x_1 + 2x_2 & = & 6 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} 4x_1 + 6x_2 & = & -2 \\ 4x_1 + 2x_2 & = & 6 \end{array}\right\}$$

Auflösen nach x_1 in der ersten Gleichung zeigt, daß das LGS äquivalent ist zu

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}x_2 \\ 4(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}x_2) + 2x_2 = 6 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}x_2 \\ x_2 & = & -2 \end{array}\right\}$$

Somit ist $x_1 = -\frac{1}{2} + 3 = \frac{5}{2}$ und $x_2 = -2$.

Daher ist die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{(\frac{5}{2}, -2)\}$.

Beispiel 3

Beispiel für ein LGS mit unendlich vielen Lösungen:

$$\left.\begin{cases} x_1 + 3x_2 & = & -1 \\ 2x_1 + 6x_2 & = & -2 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow x_1 + 3x_2 = -1 \Leftrightarrow x_1 = -1 - 3x_2$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind genau die Punkte $(-1-3\lambda, \lambda)$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$.

Die Lösungsmenge ist also

$$\mathbb{L} = \{(-1-3\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \quad = \{(-1,0) + \lambda(-3,1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Der geometrische Ort dieser Punkte ist genau eine Gerade, nämlich die Gerade durch die Punkte $(-1,0)$ und $(-4,1)$.

Struktur der Lösungsmenge eines LGS

Wir geben ohne Beweis an, daß sich die nichtleere Lösungsmenge eines LGS immer schreiben läßt in der Form

$$\mathbb{L} = \{\vec{v}_0^{\,T} + \lambda_1 \vec{v}_1^{\,T} + \lambda_2 \vec{v}_2^{\,T} + \cdots + \lambda_s \vec{v}_s^{\,T}\}$$

Die Vektoren $\vec{v}_i^{\,T}$ und ihre Anzahl sind dabei keinesfalls eindeutig bestimmt. Verschiedene Vektoren können hier dieselbe Lösungsmenge darstellen.

Hingegen ist die *kleinste* Zahl $s \in \mathbb{N}_0$, mit der die Lösungsmenge so beschrieben werden kann, eindeutig bestimmt. Diese nennt man die *Dimension* der Lösungsmenge. Die obige Lösungsmenge beschreibt dann nämlich gerade einen s-dimensionalen (sogenannten affinen) Unterraum des $\mathbb{R}^n$.

Der Vektor $\vec{v}_0^{\,T}$ ist *eine* Lösung des LGS, und die Vektoren $\vec{v}_1^{\,T}, \ldots, \vec{v}_s^{\,T}$ und alle (Linear-)Kombinationen der Form $\lambda_1 \vec{v}_1^{\,T} + \cdots + \lambda_s \vec{v}_s^{\,T}$ sind Lösungen des zugehörigen homogenen Systems.

Eine Gerade im Raum $\mathbb{R}^n$

In vorigem 3. Beispiel bestand die Lösungsmenge aus den Punkten eines eindimensionalen Unterraums des $\mathbb{R}^2$, nämlich einer Geraden.

Eine *Gerade* im $\mathbb{R}^n$ wird beschrieben durch die Vektorgleichung $\vec{x}^T = \vec{a}^T + \lambda \vec{b}^T$ mit festen Vektoren $\vec{a}^T$ und $\vec{b}^T$, wobei der Parameter λ alle reellen Zahlen durchläuft. Schreibt man dies im Fall $n = 2$ aus in der Form

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + \lambda b_1 \\ x_2 &= a_2 + \lambda b_2 \end{aligned}$$

und ist $b_1 \neq 0$, so kann man die erste Gleichung nach λ auflösen und diesen Ausdruck in die zweite Gleichung einsetzen, welche man dann in die Form $x_2 = m\,x_1 + c$ mit reellen Zahlen $m \neq 0$ und c bringen kann.

Die Gleichung $x_2 = m\,x_1 + c$ (oft auch mit y statt x_2 und x statt x_1 geschrieben) ist die bekannte Geradengleichung einer Geraden im $\mathbb{R}^2$ mit *Steigung* m und *y-Achsenabschnitt* c.

Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Beispiele und Lösungsmengen

Die Dreiecksform

Beispiele für LGS in Dreiecksform

Der Gauß-Algorithmus

LGS mit Parametern

Motivation zur Lösung von LGS

Gesucht ist ein allgemeines Verfahren zur Berechnung der Lösungen eines LGS. Dazu untersuchen wir zunächst einfache LGS, die sich leicht lösen lassen. Solche LGS sind diejenigen, die in sogenannter *Dreiecksform* gegeben sind. Wir behandeln deren Lösung zuerst.

In einem späteren Abschnitt behandeln wir dann ein Rechenverfahren, das ein beliebiges LGS in ein anderes in Dreiecksform überführt, das die gleiche Lösungsmenge besitzt. Es genügt dann, diese Dreiecksform zu lösen.

Das Rechenverfahren zur Umwandlung von LGS in andere mit gleicher Lösungsmenge heißt *Gauß-Algorithmus*.

Dreiecksform

Wir sagen, ein LGS hat *Dreiecksform*, wenn es die folgende Gestalt hat:

$$
\left(\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc|ccc|c}
a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,r+1} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\
0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,r+1} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\
0 & 0 & a_{3,3} & \cdots & a_{3,r+1} & \cdots & a_{3,n} & b_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & a_{r,r} & a_{r,r+1} & \vdots & a_{r,n} & b_r
\end{array} \\
\hline
\begin{array}{ccccc|ccccc|c}
0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{r+1} \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_m
\end{array}
\end{array}\right)
$$

Genaue Definition der Dreiecksform

Ein LGS ist also in Dreiecksform gegeben, wenn es ein $r \leq n$ gibt mit

- $a_{i,j} = 0$ für $j \leq r$ und $i > j$,
- und so, daß $a_{i,j} = 0$ ist für $i \geq r + 1$.

Das bedeutet,

- daß unterhalb der Diagonalen des Kurzschemas, auf der die Zahlen $a_{i,i}$ liegen, nur Nullen stehen,
- und daß die Einträge für die $a_{i,j}$ in den Zeilen Nr. r+1 bis Nr. m nur aus Nullen bestehen.

Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Beispiele und Lösungsmengen

Die Dreiecksform

Beispiele für LGS in Dreiecksform

Der Gauß-Algorithmus

LGS mit Parametern

Drei kleine Beispiele für LGS in Dreiecksform

1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Hier ist $r = 3$.

2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Hier ist $r = 2$.

3.

$$\left(\begin{array}{ccr|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

Hier ist $r = 3$.

Ein weiteres Beispiel

Als 4. Beispiel für ein LGS in Dreiecksform ein etwas größeres Schema:

4.

$$\left(\begin{array}{ccrcrr|c} 4 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Hier ist $r = 4$.

Lösung eines LGS in Dreiecksform

Sind die Zahlen $b_{r+1}, \dots, b_m$ in einem LGS in Dreiecksform nicht alle Null, so ist das LGS unlösbar und somit $\mathbb{L} = \emptyset$: Denn die entsprechende Gleichung mit einem $b_j \neq 0$ ist unerfüllbar.

Daher gehen wir nun davon aus, daß $b_{r+1} = \cdots = b_m = 0$ ist.

In diesem Fall wird das LGS in Dreiecksform gelöst, indem man die Zeilen von unten nach oben wieder als Gleichung zurückschreibt, und dann jede Gleichung nach einer Unbestimmten auflöst, die neu dazugekommen ist.

Kommen dabei in einer Gleichung mehrere neue Unbestimmte vor, so löst man nach nur einer auf und benennt die übrigen in Parameter um.

Der Reihe nach nennt man diese Parameter $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_s$, diese ergeben die s frei wählbaren Parameter in der Lösungsmenge.

Dreiecksformbeispiel 1 und 2

Wir verdeutlichen dieses Verfahren nun in den oberen Beispielen.

Beispiel 1: Die letzte Zeile, die nicht nur aus Nullen besteht, schreibt sich ausführlich als $x_3 = 4$, und die vorletzte als $x_3 = 3$. Diese beiden Gleichungen können nicht gleichzeitig gelten, denn sie widersprechen sich. Daher ist hier $\mathbb{L}_1 = \emptyset$.

Beispiel 2: Die letzte Zeile, die nicht nur aus Nullen besteht, schreibt sich ausführlich als $x_3 = 2$. Die Zeile darüber ist schon die erste Zeile und schreibt sich als $x_1 + x_2 = 1$. In dieser Gleichung kommen die neuen Unbekannten x_1 und x_2 vor. Wir nennen $\lambda = x_2$ und lösen nach x_1 auf: Es folgt $x_1 = 1 - \lambda$.

Daher ist die Lösungsmenge $\mathbb{L}_2 = \{(1 - \lambda, \lambda, 2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

Als Gerade geschrieben: $\mathbb{L}_2 = \{(1, 0, 2) + \lambda(-1, 1, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

Dreiecksformbeispiel 3 und 4

Im Beispiel 3 schreibt die letzte Zeile ausführlich als $3x_3 = 1$, also ist $x_3 = \frac{1}{3}$. Die vorletzte Zeile lautet $x_2 - x_3 = 0$, also ist $x_2 = x_3 = \frac{1}{3}$. Und die erste Zeile lautet $x_1 + x_2 = 1$, also ist $x_1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Somit ist die Lösungsmenge $\mathbb{L}_3 = \{(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})\}$.

Im Beispiel 4 ist die Zeile Nr. IV die letzte Zeile, in der nicht nur Nullen stehen. Ausgeschrieben lautet diese $x_5 + 2x_6 = 0$, also ist dann $x_5 = -2\lambda_1$, wobei wir $\lambda_1 = x_6$ gesetzt haben.

Die Zeile Nr. III lautet $-x_3 + 3x_4 + x_5 = 2$, aufgelöst nach x_3 ergibt dies $x_3 = -2 + 3\lambda_2 - 2\lambda_1$, wobei $\lambda_2 = x_4$ gesetzt wurde.

Dreiecksformbeispiel 4

Die Zeile Nr. II lautet $x_2 + 2x_3 + x_4 + 4x_6 = 1$, also folgt

$$\begin{aligned} x_2 &= 1 - 2x_3 - x_4 - 4x_6 \\ &= 1 - 2(-2 + 3\lambda_2 - 2\lambda_1) - \lambda_2 - 4\lambda_1 \\ &= 5 - 7\lambda_2 \end{aligned}$$

Die Zeile Nr. I schreibt sich ausführlich als $4x_1 + x_4 - x_5 = 3$, also

$$x_1 = \frac{1}{4}(3 - x_4 + x_5) = \frac{1}{4}(3 - 2\lambda_1 - \lambda_2).$$

Zusammenfassen der einzelnen Komponenten ergibt die folgende Lösungsmenge:

$$\mathbb{L}_4 = \{ \Big(\frac{1}{4}(3 - 2\lambda_1 - \lambda_2), 5 - 7\lambda_2, -2 - 2\lambda_1 + 3\lambda_2, \lambda_2, -2\lambda_1, \lambda_1\Big) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$$

Vereinfachung der 4. Lösungsmenge

Vereinfacht schreibt sich diese Lösungsmenge dann als

$$\mathbb{L}_4 = \{ (\frac{3}{4}, 5, -2, 0, 0, 0) + \lambda_1(-\frac{1}{2}, 0, -2, 0, -2, 1) + \lambda_2(-\frac{1}{4}, -7, 3, 1, 0, 0) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$$

Die Lösungsmenge beschreibt hier einen 2-dimensionalen Unterraum des $\mathbb{R}^6$, da wir hier zwei freie Parameter λ_1 und λ_2 zur Beschreibung benötigen. Geometrisch gesehen ist die Lösungsmenge in diesem Beispiel eine Ebene.

Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Beispiele und Lösungsmengen

Die Dreiecksform

Beispiele für LGS in Dreiecksform

Der Gauß-Algorithmus

LGS mit Parametern

Beschreibung des Gauß-Algorithmus

Man nennt zwei LGS, die dieselbe Lösungsmenge besitzen, auch *äquivalent*. Ziel des Gauß-Algorithmus ist es, ein LGS in eine äquivalente Dreiecksform umzuwandeln, die dann leicht gelöst werden kann.

Dafür stehen die folgenden Umformungen eines LGS in ein äquivalentes zur Verfügung:

A Zwei Zeile dürfen vertauscht werden.

B Eine Zeile wird mit einer konstanten Zahl $c \neq 0$ multipliziert.

C Zwei Zeilen werden addiert und eine der beiden ursprünglichen Zeilen wird durch die Summe ersetzt.

Oft faßt man die Regeln B und C zu einer Regel zusammen:

D Das Vielfache einer Gleichung wird zum Vielfachen einer anderen Gleichung addiert.

Beispiel für Regel A

In Kurznotation schreiben wir eine Umformung gemäß Regel A wie folgt:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 8 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \end{array} \quad \overset{A}{\Leftrightarrow} \quad \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & 3 & -1 \\ 8 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

Hier wurden die ersten beiden Zeilen vertauscht.

Beispiel für Regel B

In Kurznotation schreiben wir eine Umformung gemäß Regel B wie folgt:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & 3 & -1 \\ 8 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right) \mid \cdot (-1) \quad \overset{\text{B}}{\Leftrightarrow} \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 8 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

In diesem Beispiel wurde die erste Zeile mit -1 durchmultipliziert.

Beispiel für Regel C

In Kurznotation schreiben wir eine Umformung gemäß Regel C wie folgt:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 8 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \longleftarrow \\ \end{array} \quad \overset{\text{C}}{\Leftrightarrow} \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 9 & 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

In diesem Beispiel wurde die erste zur zweiten Zeile addiert und das Ergebnis in die zweite Zeile geschrieben.

Beispiel für Regel D

In Kurznotation schreiben wir eine Umformung gemäß Regel D wie folgt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 9 & 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot 9 \\ |\cdot(-1) \\ \end{array} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longleftarrow \\ \end{array} \quad \overset{D}{\Leftrightarrow} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & -27 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

Hier wurde die erste Zeile mal 9 genommen, die zweite mal -1 genommen, das Ergebnis addiert und in die zweite Zeile geschrieben.

Strategie zur Umwandlung in Dreiecksform

Der Gauß-Algorithmus kann nun in folgender Weise angewendet werden, um auf Dreiecksform zu kommen:

Bearbeitung der ersten Spalte:

Gibt es in der ersten Spalte nur Nullen, gehe man zur Bearbeitung der nächsten Spalte über.

Ansonsten vertauscht man zunächst solange Zeilen (Regel A), bis in der ersten Zeile und ersten Spalte eine Zahl $a_{1,1} \neq 0$ steht.

Danach verwendet man Regeln B+C bzw. Regel D mit der ersten Zeile und jeder weiteren Zeile, in der in der ersten Spalte eine Zahl $\neq 0$ steht, so daß dort stattdessen eine Null zu stehen kommt.

In obigem Beispiel für die Anwendung der Regel D wurde dies erreicht: In der zweiten Zeile steht nach Anwenden von Regel D in der ersten Spalte die Zahl $a_{2,1} = 0$.

So erreicht man, daß alle Einträge unterhalb $a_{1,1}$ zu Null werden.

Beispiel zur Bearbeitung der ersten Spalte

Im vorigen Ergebnis-LGS ist die erste Spalte noch nicht zuende bearbeitet. Wir müssen nochmal D anwenden, damit auch in der dritten Zeile in der ersten Spalte eine Null steht:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & -27 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid \cdot 3 \quad \rightarrow \\ \\ \mid \cdot (-1) \quad \leftarrow \end{array} \quad \overset{D}{\Leftrightarrow} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & -27 & 4 \\ 0 & 0 & -10 & 7 \end{array}\right)$$

Hier wurde die erste Zeile mal 3 genommen und die dritte mal -1, addiert und das Ergebnis in Zeile 3 geschrieben.

In diesem Beispiel wurde damit eine Dreiecksform für das ursprüngliche LGS schon gefunden. Diese läßt sich dann lösen.

Zur Bearbeitung der weiteren Spalten

Die anderen Spalten lassen sich nacheinander genauso bearbeiten wie die erste:

Gibt es in der nächsten Spalte eine Zahl $\neq 0$,

- so sorgt man durch Zeilenvertauschen (Regel A) zunächst dafür, daß $a_{2,2} \neq 0$
- und dann dafür (Regeln B,C,D), daß darunter nur Nullen zu stehen kommen.

Dann verfährt man so mit der dritten Spalte usw. Zuletzt wird eine Dreiecksform gefunden, die dann von unten nach oben aufgelöst werden kann.

Falls es mal nicht möglich sein sollte, eine Zahl $a_{i,i} \neq 0$ einzurichten, läßt man die Bearbeitung dieser Spalte weg und geht zur nächsten über.

Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Beispiele und Lösungsmengen

Die Dreiecksform

Beispiele für LGS in Dreiecksform

Der Gauß-Algorithmus

LGS mit Parametern

LGS mit Parametern

Ein LGS mit Parametern läßt sich prinzipiell genauso lösen wie die behandelten LGS mit konkreten Zahlenwerten für die $a_{i,j}$.

Man muß allerdings beachten, daß dann jede durchgeführte Rechenoperation zulässig ist. Dann muß man unter Umständen Fallunterscheidungen durchführen.

Je nach Fall kann dann die Lösungsmenge unterschiedlich ausfallen, wie in folgendem Beispiel: Gegeben sei das in Dreiecksform gegebene LGS

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & a(a+1) & 2a & 3a+1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right)$$

Hier ist a ein beliebig vorgebbarer reeller Parameter.

Lösung eines LGS mit Parametern

Die dritte Gleichung des LGS zeigt sofort, daß $x_3 = 1$.

Die zweite Gleichung schreibt sich aus als
$a(a+1)x_2 + 2ax_3 = 3a + 1$. Um diese nach x_2 aufzulösen zu können, müssen wir durch $a(a+1)$ dividieren, falls möglich. Daher nehmen wir nun die folgende Fallunterscheidung durch:

1. Fall: $a = 0$. Dann lautet die zweite Gleichung $0 = 1$, was nicht gilt. Daher ist die Lösungsmenge in diesem Fall $\mathbb{L} = \emptyset$.

2. Fall: $a = -1$. Dann lautet die zweite Gleichung $-2x_3 = -2$, so daß $x_3 = 1$ folgt, was wiederum identisch mit der dritten Gleichung ist. Die erste Gleichung $x_1 - x_2 + 3x_3 = 4$ enthält die beiden neuen Unbekannten x_1 und x_2. Wir lösen nach x_1 auf und nennen dabei $\lambda = x_2$, so daß folgt: $x_1 = \lambda + 1$.

Für die Lösungsmenge im 2. Fall folgt somit

$$\mathbb{L} = \{(1+\lambda, \lambda, 1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(1,0,1) + \lambda(1,1,0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Dritter Fall im Beispiel für ein LGS mit Parameter

3. Fall: $a \notin \{0, -1\}$. Dann lautet die zweite Gleichung $(a+1)a\,x_2 + 2a\,x_3 = 3a + 1$, wobei nun nach x_2 aufgelöst werden kann. Man erhält

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-2}{a+1}x_3 + \frac{3}{a+1} + \frac{1}{a(a+1)} \\ &= \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a(a+1)} = \frac{a+1}{a(a+1)} = \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

Die erste Gleichung $x_1 - x_2 + 3x_3 = 4$ läßt sich nun nach x_1 auflösen, man erhält

$$x_1 = x_2 - 3x_3 + 4 = \frac{1}{a} - 3 + 4 = 1 + \frac{1}{a}$$

Die Lösungsmenge ist im dritten Fall somit $\mathbb{L} = \{(1 + \frac{1}{a}, \frac{1}{a}, 1)\}$, man hat hier genau eine Lösung.