Einführung in die Zahlentheorie
Blatt 9

hhu Düsseldorf
WiSe 2021/22

Abgabe: bis Montag 13.12.2021

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~khalupczok/EZ/`
Die folgenden Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und abzugeben. Wie üblich sind dabei alle Behauptungen zu beweisen. Resultate aus der Vorlesung dürfen verwendet werden, die zugehörigen Referenznummern können Sie zur Klarstellung dann mit angeben.

Aufgabe 1 (3 Punkte):

Sei $\ell \in \mathbb{N}$ mit $(\ell, 10) = 1$, dann ist $\mathrm{ord}_\ell(10)$ gleich der Periodenlänge der Dezimalbruchentwicklung von $\frac{1}{\ell}$.

Aufgabe 2 (1 Punkt):

Die bis heute unbewiesene Artinsche Primitivwurzelvermutung besagt:
Ist $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq \pm 1$, keine Quadratzahl, dann existieren unendlich viele Primzahlen p, für die a eine Primitivwurzel mod p ist.

Zeigen Sie unter Annahme der Artinschen Vermutung, dass es unendlich viele Primzahlen p gibt, deren Dezimalentwicklung von $\frac{1}{p}$ die Periodenlänge $p-1$ besitzt.

Aufgabe 3 (8 Punkte):

Sei p eine Primzahl > 2. Zeigen Sie: Ist $p \equiv 1 \bmod 8$, so ist jede der folgenden Kongruenzen in $\mathbb{Z}$ lösbar:

(a) $x^4 \equiv -1 \bmod p$, (b) $x^2 \equiv 2 \bmod p$.

Untersuchen Sie für die Kongruenzen (a) und (b), ob jeweils auch die Umkehrung gilt.

Hinweis zu (a): Es gibt Primitivwurzeln mod p. **Hinweis zu (b):** $(x^2+1)^2 - 2x^2 = x^4 + 1$.

Aufgabe 4 (8 Punkte):

Sei p ein Primteiler der Fermatzahl $F_n := 2^{2^n} + 1$.

(a) Zeigen Sie durch Betrachtung der Ordnung der Restklasse 2 mod p, dass p die Gestalt $p = 1 + k2^{n+1}$ hat. Für $n \geq 2$ ist insbesondere $p \equiv 1 \bmod 8$.
(b) Sei $n \geq 2$. Zeigen Sie durch Benutzen von Aufgabe 3 (b), dass sogar $p = 1 + t2^{n+2}$ mit einem $t \in \mathbb{N}$ gelten muss.
(c) Schließen Sie: 641 ist der kleinste Primteiler von F_5.