

Einführung in die Zahlentheorie

Blatt 5

hhu Düsseldorf
WiSe 2021/22

Abgabe: bis Montag 15.11.2021

Vorlesungswebseite: <http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~khalupczok/EZ/>

Die folgenden Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und abzugeben. Wie üblich sind dabei alle Behauptungen zu beweisen. Resultate aus der Vorlesung dürfen verwendet werden, die zugehörigen Referenznummern können Sie zur Klarstellung dann mit angeben.

Aufgabe 1 (6 Punkte):

- (1) Wieviel Dezimalstellen hat u_{100} ?
- (2) Die Zahl $u_{n+1}^3 - u_{n-1}^3$ ist durch 9 teilbar, wenn u_n durch 3 teilbar ist.
- (3) Ist u_n genau dann durch 17 teilbar, wenn 9 ein Teiler von n ist?
- (4) Was kann man über (Existenz und Wert von) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+k}}{u_n}$ sagen?
- (5) $\sum_{k=1}^n k u_k - (n+1)u_{n+2} + u_{n+4} = ?$
- (6) $\sum_{k=1}^n k u_{2k} - n u_{2n+1} = ?$

Aufgabe 2 (5 Punkte):

Die Zahl $5u_n^2 + 4(-1)^n$ ist für $n \in \mathbb{N}$ stets eine Quadratzahl. (**Tipp:** Binetsche Formel, $\alpha\beta = -1$.)

Aufgabe 3 (5 Punkte):

(Lucas im Jahr 1876): Mit $j_n := \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ gilt

$$u_n = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \dots + \binom{n-j_n}{j_n-1} + \binom{n-j_n-1}{j_n}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte):

- (1) Für $z \in \mathbb{C}$, $|z| < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, gilt $\sum_{m=0}^{\infty} u_m z^m = \frac{z}{1-z-z^2}$.
- (2) $\frac{u_0}{10} + \frac{u_1}{10^2} + \frac{u_2}{10^3} + \dots + \frac{u_n}{10^{n+1}} + \dots = \frac{1}{u_{11}}$.

Zu Aufgabe 3:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
⋮

6. Diagonale