Einführung in die Zahlentheorie
Blatt 4

hhu Düsseldorf
WiSe 2021/22

Abgabe: bis Montag 8.11.2021

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~khalupczok/EZ/`
Die folgenden Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und abzugeben. Wie üblich sind dabei alle Behauptungen zu beweisen. Resultate aus der Vorlesung dürfen verwendet werden, die zugehörigen Referenznummern können Sie zur Klarstellung dann mit angeben.

Aufgabe 1 (4 Punkte):

(1) Sei $r = [q_0; q_1, q_2, q_3, \dots, q_n]$ mit $r > 1$. Bestimmen Sie die KBE von $1/r$.

(2) Bestimmen Sie die KBE von $1/s$ mit $s < 1$, wenn $s = [0; q_1, q_2, q_3, \dots, q_n]$.

(3) Geben Sie für (1) und (2) jeweils ein Beispiel an.

Aufgabe 2 (6 Punkte):

Sei $1 \le k \le n$ und c_k/d_k der k-te Näherungsbruch des Kettenbruches $[q_0; q_1, q_2, \dots, q_n]$ mit $q_0 > 0$. Dann ist

$$\frac{c_k}{c_{k-1}} = [q_k; q_{k-1}, q_{k-2}, \dots, q_1, q_0].$$

Finden und beweisen Sie auch die analoge Formel für d_k/d_{k-1}.
Hinweis: Für den ersten Bruch hilft die Beziehung $c_k/c_{k-1} = q_k + c_{k-2}/c_{k-1} = q_k + 1/(c_{k-1}/c_{k-2})$ weiter, und eine analoge Beziehung für den zweiten Bruch.

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Zeigen Sie für die Nennerfolge d_k der Näherungsbrüche einer KBE die Abschätzung

$$d_k \ge 2^{k/2} \text{ für } k \ge 2.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte):

Sei $1 \le k \le n$ und c_k/d_k der k-te Näherungsbruch der KBE $[q_0; q_1, q_2, \dots, q_n]$. Dann gilt

$$c_k = \det \begin{pmatrix} q_0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & q_1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & q_2 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & 1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & \dots & -1 & 0 \\ . & . & . & \dots & q_{k-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & q_k \end{pmatrix},$$

d. h. c_k ist die Determinante einer Bandmatrix.
Finden Sie einen ähnlichen Ausdruck für d_k (und beweisen Sie diese Beziehung).

Aufgabe 5 (2 Punkte):

Berechnen Sie mit den Näherungsbrüchen der KBE $e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, \dots]$ eine rationale Zahl, die e bis auf die 4. Nachkommastelle approximiert.