Ausführliches Inhaltsverzeichnis der Vorlesung Analytische Zahlentheorie

SoSe '22, hhu
K. Halupczok

TEIL I: Die Riemannsche Zetafunktion

AnZ 1: Anfänge der Analytischen Zahlentheorie

Potenzreihen als kombinatorisches Werkzeug, erzeugende Funktion, Eulers analytischer Beweis von $\#\mathbb{P}=\infty$, harmonische Reihe, quantitative Formulierung von $\#\mathbb{P}=\infty$ durch Abschätzung von $\sum_{p\leq x}\frac{1}{p}$

AnZ 2: Grundlagen über zahlentheoretische Funktionen

zahlentheoretische Funktion (zth. Fkt.), Faltungsprodukt $*$, Liste zth. Fktn., (vollständig) multiplikative/additive zth. Fktn., Möbiusfunktion μ, Formel $\mu * \mathbb{1} = \varepsilon$, Möbiussche Umkehrformeln, Faltungsidentitäten, sprunghaftes Verhalten von τ, Mittelwerte

---

AnZ 3: Grundlegende Werkzeuge

Asymptote, asymptotische Funktion, (Bachmann-)Landau-Symbole O und o, implizite Konstante, $\sim$, asymptotische Formeln mit Hauptterm und Fehlerterm, Vinogradov-Symbol $\ll$, partielle Summation, Eulersche Summenformel

---

AnZ 4: Dirichletreihen

Dirichletreihe, Konvergenztrichter und -halbebene, Konvergenzabszisse σ_c, absolute Konvergenzabszisse σ_a, Formeln für σ_c und σ_a, Identitätssatz

---

AnZ 5: Von zahlentheoretischen Funktionen erzeugte Dirichletreihen

Ableitung von Dirichletreihen, Riemannsche Zetafunktion $\sum_{n\geq 1}\mathbb{1}(n)n^{-s}$ für $\sigma>1$, Multiplikationssatz für Dirichletreihen und Faltungsprodukt, Beispiele dafür

---

AnZ 6: Der Wert $\zeta(2)$

Drei Methoden zur Herleitung von $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$: 1.) Fourierentwicklung der Standardparabel auf $]-\pi,\pi[$, 2.) zweidimensionale Substitutionsregel für $\int_0^1\int_0^1 \frac{dx\,dy}{1-xy}$, 3.) Partialbruchzerlegung von $\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}$ oder verwandten Funktionen

---

AnZ 7: Ein Satz von Landau

Satz von Landau zur holomorphen Fortsetzbarkeit in $s=\sigma_c$

AnZ 8: Euler-Produkte

Eulerprodukte, unendliche Produkte, Konvergenz/Divergenz unendlicher Produkte mit Reihenkriterien, absolute Konvergenz eines unendlichen Produkts, Eulerscher Produktsatz für Dirichletreihen.

AnZ 9: Beispiele für Euler-Produkte

Eulerprodukt von ζ und $\zeta(s)\neq 0$ für $\sigma>1$, Eulerproduktdarstellungen der Dirichletreihen von $\mu, \varphi, \tau, \mu^2, 2^\omega, \tau\circ P_2$, Darstellungen davon mit der ζ-Funktion, Faltungsidentitäten

---

AnZ 10: Die Riemannsche Zetafunktion

ζ als meromorphe Funktion auf $\sigma>0$, Pol bei $s=1$ vom Residuum 1, Divergenz der ζ-Reihe in jedem $1+it$

AnZ 11: Primzahlen zählen

Primzahlzählfunktionen π, ϑ, ψ, enger Zusammenhang zwischen ϑ und ψ, Satz von Tschebyschev mit Beweis (nach Erdös/Tschebyschev), Bertrands Postulat

---

AnZ 12: Über den Primzahlsatz

Vermutungen zu $\pi(x)$, Logarithmisches Integral $li(x)$, der Primzahlsatz (und verschiedene Versionen im Vergleich), Fehlerterm im PZS und Riemannsche Vermutung

---

AnZ 13: Nichtverschwinden von $\zeta(s)$ auf $\{\sigma = 1\}$

$\zeta(1+it) \neq 0$ für beliebiges $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ [durch Betrachtung von Polen/Nst. der Funktion $\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+it)$ bei einer potentiellen Nst. $1+it$ von ζ]

AnZ 14: Newmanscher Taubersatz

Satz von Abel für Potenzreihen, Umkehrung heißt Taubersatz, Taubersatz für Potenzreihen, Tauberbedingungen, Satz von Landau-Wiener-Ikehara ($\Rightarrow$ PZS), Laplace-Transformierte, Newmanscher Taubersatz (für Laplace-Transformierte)

AnZ 15: Beweis des Primzahlsatzes für ψ

Umformung der Dirichletreihen von $-\frac{\zeta'}{\zeta}$ und ζ zu Laplace-Integralen, Tauberbedingung wegen $\zeta(1+it) \neq 0$ für $t \neq 0$, Anwendung des Newmanschen Taubersatzes, Konvergenz des Integrals liefert genau den PZS in der ψ-Version

---

AnZ 16: Beweis des Primzahlsatzes für μ

Mertensfunktion M, Existenz von $\sum_{n\geq 1} \frac{\mu(n)}{n}$ bzw. $\lim_{x\to\infty} \frac{M(x)}{x}$ ist äquivalent zum PZS, diese GWe sind $= 0$, Newmanscher Taubersatz für Dirichletreihen zeigt die Kgz. von $\sum_{n\geq 1} \frac{\mu(n)}{n}$, Beweis von $M(x) = o(x) \Rightarrow$ PZS in der Form $\psi(x) \sim x$

AnZ 17: Mittelwert der Teileranzahlfunktion

Euler-Mascheroni-Konstante, Asymptotik für den Mittelwert der Teileranzahlfunktion, Dirichletsche Hyperbelmethode, Dirichletsches Teilerproblem

---

AnZ 18: Die Gammafunktion

Gammafunktion Γ auf $\mathbb{C}$, einfache Pole bei $-n$ für $n \in \mathbb{N}_0$, Funktionalgleichung von Γ, Funktionalgleichung mit komplexem Sinus

---

AnZ 19: Die Funktionalgleichung von $\zeta(s)$

Funktionalgleichungen für die Theta- und Psi-Reihe, Formel mit Γ, ζ und ψ, vollständige Zetafunktion $\xi(s)$, Funktionalgleichung von ξ, triviale und nichttriviale Nullstellen von ζ, Symmetrie der Nullstellen

---

(AnZ 20: Die Poissonsche Summenformel)

Fourierreihe und Fourierkoeffizienten, Dirichletkern, Fejérkern, Partialsummen der Fourierreihe, Fouriertransformierte von f, Poissonsche Summenformel

---

AnZ 21: Sätze von Mertens

Zwei asymptotische Formeln für $\sum_{p \leq x} \frac{1}{p}$, Meissel-Mertens-Konstante, Satz von Mertens für $\prod_{p \leq x} (1 - \frac{1}{p})$ mit $e^{-\gamma}$, asymptotische Formeln für die Eulerprodukte $\prod_{p \leq x} (1 + \frac{\kappa}{p})$ mit $\kappa > 0$, speziell für $\kappa = 1$.

AnZ 22: Die Riemannsche Vermutung

Riemannsche Vermutung (RH), Nullstellenanzahl, explizite Formel, Vielfachheit der Nullstellen, von-Mangoldt-explizite Formel, Resttermabschätzung im PZS und Realteile der Zetanullstellen, konditionelle und unkonditionelle Aussagen

---

TEIL II: Primzahlen in Progressionen:

AnZ 23: Dichten

natürliche Dichte, Dirichlet-Dichte, Dichte(n) der Primzahlen und der quadratfreien Zahlen, äquivalente Definitionen der Dirichlet-Dichten, Dirichletscher Primzahlsatz, Primzahlsatz in arithmetischen Progressionen

---

AnZ 24: Charaktere

Gruppencharakter, Dirichletcharakter, Hauptcharakter, Orthogonalitätsrelationen, Grundeigenschaften von Charakteren, Charaktergruppe $\cong (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$, Charaktertafeln

---

AnZ 25: Dirichletsche L-Funktionen

(Dirichletsche) L-Reihe und L-Funktion, Eulerproduktdarstellung für $L(s,\chi)$, Summen über APs von zth. Fkt. mit Charakteren umschreiben, Zählfunktion $\psi(x;q,a)$, Funktionalgleichung für L-Funktionen

---

AnZ 26: $L(1,\chi) \neq 0$

Vielfachheiten der Nullstelle $s=1$ von $L(s,\chi)$ in $\sum_{n\equiv a(q)} \Lambda(n) n^{-s}$, $L(1,\chi)\neq 0$ für komplexe und reelle Charaktere $\chi \neq \chi_0$, Dirichlet-Dichte der PZpotenzen $p^k \equiv a \ (q)$.

AnZ 27: Dirichletscher Primzahlsatz

Satz von Dirichlet, Dirichlet-Dichte $\delta_{\mathbb{P}}(P_{a,q}) = \frac{1}{\varphi(q)}$, natürliche Dichte $d_{\mathbb{P}}(P_{a,q})$, $L(1+it,\chi)\neq 0$, PZS in APs für $\psi(x;q,a)$ mit Newmanschem Taubersatz, Versionen mit $\vartheta(x;q,a)$ und $\pi(x;q,a)$

AnZ 28: Primzahlen in Progressionen

PZS in APs mit Restterm o.A.u.V., Abhängigkeit des Restterms von q, Siegelnullstelle, Satz von Siegel, Satz von Siegel-Walfisz

---

AnZ 29: Verallgemeinerte Riemannsche Vermutung

Verallgemeinerte Riemannsche Vermutung (GRH), explizite Formel für $\psi(x,\chi)$, Restterm im PZS in APs unter (GRH), Vermutung von Montgomery, Deuring-Heilbronn-Abstoßungsphänomen

---

Ende der Vorlesung