Vorlesung Analytische Zahlentheorie

SoSe'22, hhu
K. Halupczok

AnZ 9: Beispiele für Eulerprodukte

Stichworte: Eulerprodukt von ζ und $\zeta(s)\neq 0$ für $\sigma>1$, Eulerprodukt-darstellungen der Dirichletreihen von $\mu, \varphi, \tau, \mu^2, 2^\omega, \tau(n^2)$, Darstellungen davon mit der ζ-Funktion, Faltungsidentitäten

---

9.1. Einleitung: ζ hat das Eulerprodukt $\zeta(s)=\prod_p \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$ in $\{\sigma>1\}$ und demnach dort keine Nullstellen. Auch für beliebige andere Dirichletreihen mit multiplikativen zahlentheoretischen Funktionen als Koeffizientenfolge finden wir ein Eulerprodukt.

Die Riemannsche Zetafunktion $\zeta(s)$ ist für $\sigma>1$ durch die Dirichletreihe $\zeta(s)=\sum_{n\geq 1} n^{-s}$ definiert (die dort kgt., in $s=1$ nicht mehr). Für die Reihe gilt $\sigma_c=\sigma_a=1$. Mit Satz 8.15 erhalten wir nun in der Konvergenzhalbebene $\{\sigma>1\}$ die Eulerproduktdarstellung von ζ, und als weitere Konsequenz, dass ζ auf $\{\sigma>1\}$ keine Nullstelle besitzt, so dass dort auch $\frac{1}{\zeta(s)}$ betrachtet werden kann.

9.2. Satz: (i) Für $\sigma>1$ hat $\zeta(s)$ die Eulerproduktdarstellung $\zeta(s)=\prod_p (1-p^{-s})^{-1}$.

(ii) Insb. ist dort $\zeta(s)\neq 0$ und $\frac{1}{\zeta(s)}=\sum_{n\geq 1}\mu(n)n^{-s}$.

Bew.: Zu (i): Das unendliche Produkt konvergiert absolut auf $\{\sigma>1\}$:

Es ist $\sum_p \Big|\underbrace{\log\Big(\frac{1}{1-p^{-s}}\Big)}_{=-\log(1-p^{-s})}\Big|<\infty$, da $\sum_p \Big|\frac{1}{p^s}\Big| = \sum_p \frac{1}{p^\sigma} \leq \underbrace{\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\sigma}<\infty}_{\text{Absolute Kgz. von } \zeta \text{, ist Vor. von 8.15}}$. (vgl. 8.11)

Auf $\{\sigma>1\}$ gilt somit $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s} = \prod_p \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p^{ks}}}_{=:1+\alpha_p} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}$ laut Satz 8.15, da $\mathbb{1}$ vollständig multiplikative Funktion ist. Sei $\alpha_p := \sum_{k=1}^{\infty} p^{-ks} = p^{-s}\cdot\frac{1}{1-p^{-s}}$.

Zu (ii): • Da $|\alpha_p| = \frac{1}{|p^s|}\cdot\frac{1}{|1-p^{-s}|}\leq\frac{2}{p^\sigma}$, folgt $|\alpha_p|<1$, die Faktoren $1+\alpha_p$ im Eulerprodukt sind somit alle $\neq 0$. Nach 8.8 ist dann auch das unendliche Produkt $\neq 0$.

• Der Zusatz über $\frac{1}{\zeta(s)}$ folgt aus 5.9 für $\sigma>1$, da ζ dort keine Nullstellen hat. □

Für beliebige multiplikative zahlentheoretische Funktionen $f(n)$ gibt uns der Eulersche Produktsatz eine Produktdarstellung, hier eine Auswahl.

9.3. **Satz:** Es gelten die Eulerproduktdarstellungen

$$(1)\ \sum_{n\geq 1} \frac{\mu(n)}{n^s} = \prod_p \left(1-\frac{1}{p^s}\right) \text{ für } \sigma>1,$$

$$(2)\ \sum_{n\geq 1} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \prod_p \left(1-\frac{1}{p^s}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{p^{s-1}}\right)^{-1} \text{ für } \sigma>2,$$

$$(3)\ \sum_{n\geq 1} \frac{\tau(n)}{n^s} = \prod_p \left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-2} \text{ für } \sigma>1.$$

Bew.: (1): mit Satz 8.15:

$$\text{l.S.} = \prod_p \Big(1+\underbrace{\frac{\mu(p)}{p^s}}_{=-p^{-s}}+\underbrace{\frac{\mu(p^2)}{p^{2s}}+\ldots}_{=0}\Big) = \prod_p \left(1-\frac{1}{p^s}\right), \text{ sofern } \sum_{n\geq 1}\frac{\mu(n)}{n^s} \text{ abs. kgt.,}$$
d.h. falls $\sigma>1$.

(2): mit Satz 8.15: $\text{l.S.} = \prod_p \left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi(p^k)}{p^{ks}}\right)$

$$= \prod_p \left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p^k-p^{k-1}}{p^{ks}}\right) = \prod_p \left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-1/p}{p^{k(s-1)}}\right)$$

$$= \prod_p \left(1+\left(1-\frac{1}{p}\right)\cdot\frac{1}{p^{s-1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p^{k(s-1)}}\right) = \prod_p \left(1+\frac{p-1}{p^s}\cdot\frac{1}{1-1/p^{s-1}}\right) = \prod_p \frac{1-p^{1-s}+p^{1-s}-p^{-s}}{1-1/p^{s-1}}$$

$$= \prod_p \left(1-\frac{1}{p^s}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{p^{s-1}}\right)^{-1},$$ sofern $\sum_{n\geq 1}\frac{\varphi(n)}{n^s}$ abs. kgt, was es wegen $\varphi(n)\leq n$ für $\sigma>2$ ist.

(3): mit Satz 8.15: $\text{l.S.} = \prod_p \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tau(p^k)}{p^{ks}} = \prod_p \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{p^{ks}} = \prod_p \frac{1}{(1-p^{-s})^2}$,

sofern $\sum_{n\geq 1}\frac{\tau(n)}{n^s}$ abs. kgt., was für $\sigma>1$ gilt da $\underbrace{\tau(n)\ll n^{\varepsilon}}_{\text{laut Ü Blatt 2, A4}}$ für alle $\varepsilon>0$.

$$\left(\text{da } \sum_{k\geq 0}(k+1)x^k = \Big(\sum_{k\geq 0}x^k\Big)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}\right)$$ $\square$

9.4. **Korollar:** • Aufgrund der ζ-Produktdarstellung $\zeta(s)=\prod_p(1-p^{-s})^{-1}$ folgt aus 9.3 unmittelbar $(1)\ \sum_{n\geq 1}\frac{\mu(n)}{n^s}=\zeta(s)^{-1}$ für $\sigma>1$, $(2)\ \sum_{n\geq 1}\frac{\varphi(n)}{n^s}=\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$ für $\sigma>2$,
$(3)\ \sum_{n\geq 1}\frac{\tau(n)}{n^s}=\zeta^2(s)$ für $\sigma>1$.

• Aufgrund des Multiplikationssatzes 5.7 und Identitätssatz 4.11 für Dirichletreihen folgen daraus auch unmittelbar wieder die bekannten Faltungsformeln
(1) $\mu * 1\!\!1 = \varepsilon$, (2) $\varphi * 1\!\!1 = \mathrm{id}$, (3) $\tau = 1\!\!1 * 1\!\!1$ aus AnZ2.

Das hier vorgestellte Programm, über Eulerproduktdarstellungen auf

Faltungsformeln zu schließen, zeigt auch noch andere Faltungsformeln, die wir bislang noch nicht kennen. Außerdem wird nochmals deutlich, dass ζ selbst eine grundlegende Rolle für die Theorie der Dirichletreihen spielt:

9.5. **Satz**: (1) Für $\sigma>1$ ist $\sum_{n\geq 1}\frac{\mu^2(n)}{n^s}=\prod_p\left(1+\frac{1}{p^s}\right)=\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}$.

(2) Für $\omega(n):=\#\{p\mid n\}$ gilt $\sum_{n\geq 1}\frac{2^{\omega(n)}}{n^s}=\prod_p\frac{1+p^{-s}}{1-p^{-s}}=\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)}$ für $\sigma>1$, also ist $2^{\omega(n)}=\mu^2*\mathbb{1}$ nach (1).

(3) Für $\sigma>1$ gilt $\sum_{n\geq 1}\frac{\tau(n^2)}{n^s}=\prod_p\frac{1-p^{-2s}}{(1-p^{-s})^3}=\frac{\zeta^3(s)}{\zeta(2s)}$, also ist $\hat{\tau}\overset{(2)}{=}2^{\omega(n)}*\mathbb{1}=\mu^2*\underbrace{\mathbb{1}*\mathbb{1}}_{=\tau}$ wo $\hat{\tau}(n):=\tau(n^2)$.

Bew.: (1): Mit Satz 8.15 folgt, da $\sum_{n\geq 1}\frac{\mu^2(n)}{n^s}$ wegen $|\mu^2(n)|\leq 1$ für $\sigma>1$ abs. kgt., dass
l.S. $=\prod_p\left(1+\frac{\mu^2(p)}{p^s}+\frac{\mu^2(p^2)}{p^{2s}}+\dots\right)=\prod_p(1+p^{-s}+0)=\prod_p\frac{1-p^{-2s}}{1-p^{-s}}=\frac{1}{\zeta(2s)}\cdot\zeta(s)$.

Zu (2): Mit Satz 8.15 folgt, da $\sum_{n\geq 1}\frac{2^{\omega(n)}}{n^s}$ wegen $2^{\omega(n)}\leq\tau(n)\ll n^\varepsilon$ für $\sigma>1$ abs. kgt., dass l.S. $=\prod_p\left(1+\frac{2}{p^s}+\frac{2}{p^{2s}}+\dots\right)=\prod_p\left(1+\sum_{k\geq 1}^{\infty}\frac{2}{p^{ks}}\right)=\prod_p\left(1+2\cdot\left(\frac{1}{1-p^{-s}}-1\right)\right)$

$=\prod_p\left(2\cdot\frac{1}{1-p^{-s}}-1\right)=\prod_p\frac{2-1+p^{-s}}{1-p^{-s}}=\underbrace{\prod_p\frac{1+p^{-s}}{1-p^{-s}}}_{\text{behauptetes Euler-PI}}=\prod_p\frac{(1+p^{-s})(1-p^{-s})}{(1-p^{-s})^2}$

$\overset{\text{bin. F.}}{=}\prod_p(1-p^{-2s})(1-p^{-s})^{-2}=\frac{1}{\zeta(2s)}\cdot\zeta^2(s)$.

(3): Mit Satz 8.15 folgt, da $\sum_{n\geq 1}\frac{\tau(n^2)}{n^s}$ wegen $\tau(n^2)\ll n^\varepsilon$ für alle $\varepsilon>0$, dass l.S. $=\prod_p\left(1+\frac{\tau(p^2)}{p^s}+\frac{\tau(p^4)}{p^{2s}}+\frac{\tau(p^6)}{p^{3s}}+\dots\right)=\prod_p\left(1+\frac{3}{p^s}+\frac{5}{p^{2s}}+\frac{7}{p^{3s}}+\dots\right)$

$=\prod_p\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+1}{p^{ks}}=\prod_p\left(2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{p^{ks}}-\sum_{k=0}^{\infty}p^{-ks}\right)\underset{\text{s.o. Bew. von 9.3.(3)}}{=}\prod_p\left(2\frac{1}{(1-p^{-s})^2}-\frac{1}{1-p^{-s}}\right)$

$=\prod_p\frac{2-1+p^{-s}}{(1-p^{-s})^2}=\prod_p\frac{1+p^{-s}}{(1-p^{-s})^2}$

$=\underbrace{\prod_p\frac{1}{1-p^{-s}}}_{=\zeta(s)}\cdot\prod_p\frac{1-p^{-2s}}{(1-p^{-s})^2}\overset{(1)}{=}\zeta(s)\cdot\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)}=\frac{\zeta^3(s)}{\zeta(2s)}$. $\square$