Vorlesung Analytische Zahlentheorie

SoSe '22, hhu
K. Halupczok

AnZ 8: Euler-Produkte

Stichworte: Eulerprodukte, unendliche Produkte, Konvergenz/Divergenz unendlicher Produkte mit Reihenkriterien, absolute Konvergenz eines unendlichen Produkts, Eulerscher Produktsatz für Dirichletreihen.

8.1. Einleitung: Dirichletreihen mit multiplikativen Koeffizientenfolgen lassen sich in Produkte entwickeln, deren Faktoren von Primzahlen $p \in \mathbb{P}$ abhängig ausgedrückt werden. Man nennt solche Produkte Euler-Produkte oder die Eulersche Produktdarstellung. In AnZ 1 haben wir bereits $\prod_{p \leq x} (1-\frac{1}{p})^{-1}$ für $x \to \infty$ betrachtet.
Da es sich um unendliche Produkte handelt, muss zunächst einiges über ihre Konvergenz/Wohldefiniertheit gesagt werden, z.B. ob die Faktorenreihenfolge eine Rolle spielen könnte (also ob eine "absolute Konvergenz" auch für Produkte gilt).

Zu unendlichen Produkten:

8.2. Def.: Sei $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ Folge komplexer Zahlen.

- Das n-te Partialprodukt sei $P_n := \prod_{k \leq n} \alpha_k$. (analog n-ter Partialsummen bei Reihen)
- Falls $P_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha \neq 0$,
  dann konvergiert das unendl. Produkt gegen α, wir schreiben $\prod_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \alpha$,
  d.h. $\prod_{k=1}^{\infty} \alpha_k := \lim_{n\to\infty} \prod_{k \leq n} \alpha_k$, oder auch $\prod_{k \geq 1} \alpha_k$.
- Ansonsten divergiert es (im Fall $\alpha = 0$ sagen wir: es divergiert gegen 0).
- Wir schreiben stets symbolisch $\prod_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ für das unendliche Produkt, auch im Divergenz-Fall.

8.3. Bemerkungen:

1.) Sei $\alpha_k = 1 + c_k$. Falls $\prod_{k \geq 1} \alpha_k = \prod_{k=1}^{\infty} (1+c_k)$ kgt., dann ist $\forall k: c_k \neq -1$.
In diesem Fall ist $\lim_{k\to\infty} (1+c_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{P_k}{P_{k-1}} = 1$, und $\lim_{k\to\infty} c_k = 0$.
bzw. $\lim_{k\to\infty} \alpha_k = 1$ und $\lim_{k\to\infty} (\alpha_k - 1) = 0$.

2.) Verschwindet in $\prod_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ (mindestens) ein Faktor, so divergiert das Produkt gegen 0.

AnZ 8

3.) Das Produkt $\prod_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ divergiert gegen 0, obwohl alle Faktoren $\neq 0$.

4.) Das Produkt $\prod_{k\geq 1} k$ divergiert (wenn man will: bestimmt gegen $+\infty$).

Für reelle unendliche Produkte kann man leicht ein Konvergenzkriterium zeigen:

8.4. Satz von der Kgz. eines unendlichen Produkts: Sei $\forall k: c_k \geq 0$. Dann ist $\prod_{k=1}^{\infty}(1+c_k)$ kgt. genau dann wenn $\sum_{k\geq 1} c_k$ kgt.

Bew.: Sei $S_m := \sum_{k\leq m} c_k$, $P_m := \prod_{k\leq m}(1+c_k)$. Da $c_k \geq 0$, sind S_m, P_m monoton wachsend und $P_m \geq 1$ für alle m. Da $1+x \leq e^x$ für alle $x\in\mathbb{R}$, folgt

$$0 \leq \sum_{k\leq n} c_k < \prod_{k\leq m}(1+c_k) \leq \prod_{k\leq m} e^{c_k} = \exp\Big(\sum_{k\leq m} c_k\Big), \text{ also } 0 \leq S_m < P_m \leq e^{S_m}.$$

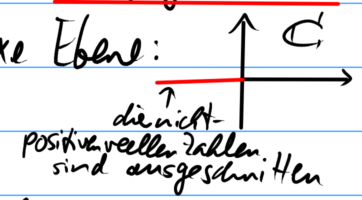
Somit: S_m kgt. $\Leftrightarrow$ P_m kgt. □

Falls man es mit komplexen Folgen $(1+c_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ zu tun hat, muss man für das analoge Kriterium ein wenig mehr ausholen. Man benötigt dafür die komplexe Funktion log, den Hauptzweig des Logarithmus:

8.5. Def.: $\log : \mathbb{C}\setminus\{z\in\mathbb{C};\ z\in\mathbb{R}_{\leq 0}\} \longrightarrow \{z\in\mathbb{C};\ -\pi < \mathrm{Im}(z) < \pi\}$

$$z = e^{x+iy} \longmapsto x+iy \quad \text{mit } -\pi<y<\pi$$

Der Definitionsbereich $\mathbb{C}\setminus\{z\in\mathbb{C};\ z\in\mathbb{R}_{\leq 0}\}$ ist die "links geschlitzte" komplexe Ebene:



8.6. Bem.: Haben jetzt leider i.a. $\log(uv) \neq \log u + \log v$,

z.B. $\log(e^{3\pi i/4}) + \log(e^{3\pi i/4}) = \frac{3\pi}{4}i + \frac{3\pi}{4}i = \frac{3\pi}{2}i \neq -\frac{\pi}{2}i = \log(e^{3\pi i/2})$.

8.7. Potenzreihenentwicklung: Für $a\in\mathbb{C}$ mit $|a|<1$ gilt

$$\log(1+a) = \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}a^n.$$

($\rightarrow$ s. Funktionentheorie, die reelle Taylorreihenentwicklung überträgt sich nach $\mathbb{C}$; bzw.: Für die Ableitungen gilt $\frac{1}{1+a} \overset{!}{=} \sum_{n\geq 1}(-a)^{n-1} = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}a^{n-1} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n a^n = \frac{1}{1-(-a)}$ (ok ✓), der Vergleich mit $a=0$ zeigt die Gleichung.)

Wir kommen nun zu unserem ersten Konvergenzkriterium für unendliche Produkte, der mit log formuliert wird:

8.8. **Lemma:** Für eine Folge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{C}$, mit $\alpha_n \notin \mathbb{R}_{\leq 0}$ sind äquivalent:
(i) $\prod_{n\geq 1} \alpha_n$ konvergiert, (ii) $\sum_{n\geq 1} \log(\alpha_n)$ konvergiert.

Bew.: (ii)⇒(i): Sei $P_N := \prod_{n\leq N} \alpha_n$ das N-te Partialprodukt.
Dann ist $P_N = \prod_{n\leq N} e^{\log(\alpha_n)} = e^{\sum_{n\leq N}\log(\alpha_n)} \xrightarrow{N\to\infty} e^{\sum_{n\geq 1}\log(\alpha_n)}$ wegen der Stetigkeit der komplexen Funktion exp. Der Grenzwert existiert und ist $\neq 0$, da $0 \notin \text{Bild}(\exp)$. [Die komplexe Exponentialfkt. hat keine Nullstellen.]
(i) ⇒ (ii): • Sei OE $P = \prod_{n\geq 1} \alpha_n \notin \mathbb{R}_{\leq 0}$ (ersetzen sonst α_1).
Dann ist $P_N := \prod_{n\leq N} \alpha_n \notin \mathbb{R}_{\leq 0}$ für alle hinreichend großen N.
Somit folgt aus der Stetigkeit von log, dass $\lim_{N\to\infty} \log P_N = \log P$ (*) ist
• Wegen $\exp(\log P_N) = P_N = \exp\left(\sum_{n\leq N} \log\alpha_n\right)$ existiert ein $k_N \in \mathbb{Z}$ mit
$\log P_N - \sum_{n\leq N} \log(\alpha_n) = 2\pi i k_N$, für jedes $N\in\mathbb{N}$.
Damit ist

$$|2\pi i(k_{N+1} - k_N)| = \left|\log(P_{N+1}) - \sum_{n\leq N+1} \log(\alpha_n) - \log(P_N) + \sum_{n\leq N}\log(\alpha_n)\right|$$

$$\underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \underbrace{\left|\log(P_{N+1}) - \log(P_N)\right|}_{\xrightarrow{N\to\infty} 0 \text{ nach } (*)} + |\log(\underbrace{\alpha_{N+1}}_{\xrightarrow{N\to\infty} 1 \text{ nach } 8.3.1.)})| \xrightarrow{N\to\infty} 0.$$

• Also ex. ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $k_{N+1} = k_N$ für alle $N \geq N_0$.
Es folgt $\sum_{n\leq N} \log(\alpha_n) = P - 2\pi i k_{N_0}$, d.h. $\sum_{n\geq 1} \log(\alpha_n)$ konvergiert. □

Wir kommen damit zur absoluten Konvergenz von unendlichen Produkten:

8.9. **Def.:** Ein Produkt $\prod_{n\geq 1} \alpha_n$ heißt absolut konvergent, falls
$\sum_{n\geq 1} |\log(\alpha_n)|$ konvergiert (die $\alpha_n \notin \mathbb{R}_{\leq 0}$).

8.10. **Bsp.:** $\prod_{n\geq 1} e^{(-1)^n/n^2}$ konvergiert absolut, da $\sum_{n\geq 1} |\log(e^{(-1)^n/n^2})| = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ konvergiert.
Die Faktoren dürfen beliebig umgeordnet werden. Nicht aber in $\prod_{n\geq 1} e^{(-1)^n/n}$.

Wir erhalten mit 8.8 ein Kriterium für absolute Konvergenz unendlicher Produkte, das die "Wortwahl" der Def. 8.9 klarmacht:

AnZ 8
-4-

8.11. <u>Satz:</u> Sei $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathbb{C}$ mit $|\alpha_n|<1$ für alle $n\in\mathbb{N}$.
Dann sind äquivalent: (i) $\prod_{n\geq 1}(1+\alpha_n)$ konvergiert absolut,
(ii) $\sum_{n\geq 1}|\alpha_n|$ konvergiert.

<u>Bew.:</u> • Wird (i) oder (ii) angenommen, bilden die (α_n) jeweils eine Nullfolge.
• Sei $\varepsilon>0$. Für $|a|<1$ ist $\log(1+a)=a-\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3}-+\dots$, also $(1-\varepsilon)|a|\leq|\log(1+a)|\leq(1+\varepsilon)|a|$ (*)
für genügend kleine $|a|$, denn $|\log(1+a)|\geq|a|-|a|\cdot\left(\frac{|a|}{2}+\frac{|a|^2}{3}+\dots\right)\geq|a|-|a|^2\cdot\sum_{n\geq 0}|a|^n\geq|a|\cdot(1-\varepsilon)$
und $\log(1+a)\leq|a|+|a|\cdot\left(\frac{|a|}{2}+\frac{|a|^2}{3}+\frac{|a|^3}{4}\dots\right)\leq|a|+|a|^2\sum_{n\geq 0}|a|^n\leq|a|\cdot(1+\varepsilon)$.
• Sei N so groß, dass (*) erfüllt ist für alle α_n mit $n\geq N$.
Dann ist $(1-\varepsilon)\sum_{n=N}^{\infty}|\alpha_n|\leq\sum_{n=N}^{\infty}|\log(1+\alpha_n)|\leq(1+\varepsilon)\sum_{n=N}^{\infty}|\alpha_n|$.
Diese Ungleichungen zeigen $\sum_{n\geq 0}|\log(1+\alpha_n)|$ kgt. $\iff\sum_{n\geq 0}|\alpha_n|$ kgt.
Nach Def. 8.9 folgt die Beh. □

8.12. <u>Korollar:</u> Seien die $|\alpha_n|<1$ und $P=\prod_{n=1}^{\infty}(1+\alpha_n)$ konvergiere absolut.
Dann gilt für jede Bijektion $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, dass $P_f:=\prod_{n=1}^{\infty}(1+\alpha_{f(n)})=P$ ist.
<u>Bew.:</u> $P=\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}(1+\alpha_n)=\lim_{N\to\infty}\exp\left(\sum_{n=1}^{N}\log(1+\alpha_n)\right)=\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+\alpha_n)\right)$
$=\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+\alpha_{f(n)})\right)=P_f$. □

Diese Umordenbarkeit absolut konvergenter Produkte rechtfertigt die folgende Schreibweise:

8.13. <u>Notation:</u> Sei $(\alpha_i)_{i\in I}$ abzählbare Familie von $\alpha_i\in\mathbb{C}$ mit $\sum_{i\in I}|a_i|<\infty$.
Dann ist $\prod_{i\in I}(1+\alpha_i)$ wohldefiniert.

8.14. <u>Bem.:</u> Dies erlaubt also auch Schreibweisen $\prod_p a_p$, d.h. mit $I=\mathbb{P}$, im Falle der absoluten Konvergenz.

Wir kommen nun zum Eulerschen Produktsatz, der erlaubt, eine Dirichletreihe zu einer multiplikativen zth. Fkt. als unendliches Produkt über $p\in\mathbb{P}$ zu schreiben.
Wir hatten: • Eine zth. Fkt. f heißt multiplikativ, falls $f(nm)=f(n)f(m)$ für alle teilerfremden $m,n\in\mathbb{N}$.
• Eine zth. Fkt. f heißt vollständig multiplikativ, falls $f(nm)=f(n)f(m)$ für <u>alle</u> $m,n\in\mathbb{N}$.

AnZ8

-5-

8.15 **Eulerscher Produktsatz:** Sei f multiplikative zth. Fkt. und $s \in \mathbb{C}$.

(i) Ist $F(s) = \sum_{n \geq 1} f(n) n^{-s}$ absolut kgt., dann ist $F(s) = \prod_p \left(\sum_{k=0}^{\infty} f(p^k) p^{-ks} \right)$.

⌜Und insb. ist das Produkt absolut kgt.⌟

(ii) Ist f darüberhinaus vollständig multiplikative zth. Fkt., so nimmt das Produkt die einfache Form $\prod_p (1 - f(p) p^{-s})^{-1}$ an.

Bew.: Aus der absoluten Kgz. von $\sum_{n \geq 1} f(n) n^{-s}$ folgt aufgrund der Multiplikativität von $f(n) n^{-s}$ (in n) die Konvergenz von $\sum_p \left| \sum_{\alpha \geq 1} f(p^\alpha) p^{-\alpha s} \right|$ (mit der PFZ der $n \geq 1$), und daraus nach Satz 8.11 die abs. Kgz. des unendlichen Produkts

$$M := \prod_p \left(1 + \sum_{\alpha \geq 1} f(p^\alpha) p^{-\alpha s} \right).$$

Sei $P^+(n)$ der größte Primfaktor von n. Dann gilt für alle $x \geq 1$

$$\Big| \sum_{n \geq 1} f(n) n^{-s} - \prod_{p \leq x} \underbrace{\sum_{\alpha \geq 0}}_{\text{für } "1+"} f(p^\alpha) p^{-\alpha s} \Big| = \Big| \sum_{n,\, P^+(n) > x} f(n) n^{-s} \Big| \leq \sum_{n > x} |f(n) n^{-s}|.$$

Mit $x \to \infty$ folgt Beh. (i).

Falls f vollst. mult., ist $1 + \sum_{\alpha \geq 1} f(p^\alpha) p^{-\alpha s} = 1 + \sum_{\alpha \geq 1} f(p)^\alpha p^{-\alpha s} = \frac{1}{1 - f(p) p^{-s}}$, es folgt Beh. (ii). □

8.16 **Bem.:** • Den Ausdruck $\sum_{k=0}^{\infty} f(p^k) p^{-ks}$ kann man als $1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \frac{f(p^3)}{p^{3s}} + \ldots$ ausschreiben, und für $(1 - f(p) p^{-s})^{-1}$ schreibt man auch $\frac{1}{1 - \frac{f(p)}{p^s}}$.

• Ein Produkt wie im Eulerschen Produktsatz nennt man oft ein Eulerprodukt, und die Aussage des Satzes die Entwicklung einer Dirichletreihe in ein Eulerprodukt.

• Die Bedeutung des Satzes für ζ und andere Dirichletreihen wird in den nächsten beiden Kapiteln AnZ9, AnZ10 deutlich.