Vorlesung Analytische Zahlentheorie

SoSe'22, hhu
K. Halupczok

AnZ 7: Ein Satz von Landau

Stichworte: Satz von Landau zur holomorphen Fortsetzbarkeit in $s=\sigma_c$

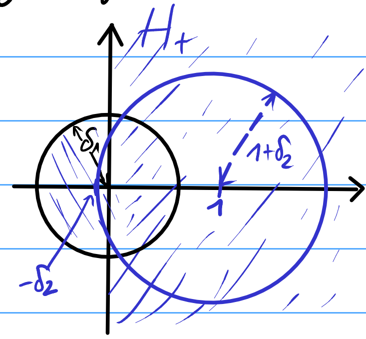
7.1. Einleitung: Dirichletreihen mit nichtnegativen Koeffizienten können nicht in den Punkt $s=\sigma_c\in\mathbb{R}$ holomorph fortgesetzt werden.

7.2. Satz von Landau: Die Dirichletreihe $F(s)=\sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$ habe die Konvergenzabszisse $\sigma_c\in\mathbb{R}$. Es gelte $\forall n\in\mathbb{N}: a_n\geq 0$.
Dann ist F nicht in den Punkt $s=\sigma_c\in\mathbb{R}$ holomorph fortsetzbar.

Bew.: Es werde OE $\sigma_c=0$ angenommen.
Ann.: Sei F in den Punkt $s=0$ fortsetzbar. Dann ist F holomorph in $H_+=\{s=\sigma+i\tau;\ \sigma>0\}$, erweitert um einen Kreis vom Radius $\delta_1>0$ um $s=0$. Insbesondere ist F holomorph im Kreis vom Radius $1+\delta_2$, mit einem $\delta_2>0$, um $s=1$.

Nun werde F um $s=1$ Taylor-entwickelt. Dazu benutzt man
$$F^{(k)}(1)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^k a_n \log^k(n)\, n^{-1}$$
aus Satz 5.2.

Da $s^*=-\frac{1}{2}\delta_2$ im Holomorphiekreis um 1 liegt, ergibt sich



$$F(s^*)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{F^{(k)}(1)}{k!}(s^*-1)^k$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\underbrace{\frac{(-1)^k}{k!}\cdot(-1)^k}_{\geq 0}\left(1+\tfrac{1}{2}\delta_2\right)^k\sum_{n=1}^{\infty}\underset{\uparrow\, \geq 0}{a_n}\log^k(n)\, n^{-1}.$$

Die Doppelreihe $\sum_k \sum_n$ hat nach Voraussetzung nur nichtnegative Summanden. Die Reihe $\sum_k$ ist Potenzreihe (in $1+\frac{1}{2}\delta_2$) und konvergiert absolut. Die Doppelreihe konvergiert somit und kann umgeordnet werden. Es folgt

$$F\left(-\tfrac{1}{2}\delta_2\right) = \sum_{n\geq 1} a_n n^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\left(1+\tfrac{1}{2}\delta_2\right)\log(n)\right)^k$$

$$= \sum_{n\geq 1} a_n n^{-1} \exp\left(\left(1+\tfrac{1}{2}\delta_2\right)\log(n)\right)$$

$$= \sum_{n\geq 1} a_n n^{-(-1/2\delta_2)}.$$

Die vorige Gleichung besagt, dass die Dirichlet-Reihe für F bei $-\frac{1}{2}\delta_2$ konvergiert, was der Voraussetzung $\sigma_c = 0$ widerspricht.

$\square$

7.3. Beispiel: Die Zetafunktion $\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} n^{-s}$ mit Konvergenzabszisse $\sigma_c = 1$ $(=\sigma_a)$ kann nicht in den Punkt $s=1$ holomorph fortgesetzt werden.
Wir werden später (ab AnZ 10) eine meromorphe Fortsetzung von ζ auf ganz $\mathbb{C}$ gewinnen, die im Punkt $s=1$ nach 7.2 einen Pol besitzt.

7.4. Bem.: Der Satz von Landau stimmt nicht, wenn die Voraussetzung $a_n \geq 0$ nicht gilt, wie z.B. an $\sum_{n\geq 1} (-1)^n n^{-s}$ zu sehen ist mit $\sigma_c = 0$, da diese Funktion zu einer auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphen Fkt. fortgesetzt werden kann.

[ohne Beweis]