Vorlesung Analytische Zahlentheorie

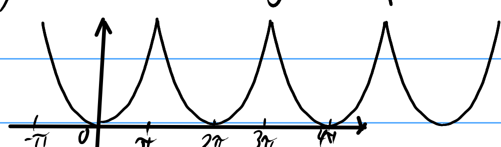
SoSe '22, hhu
K. Halupczok

AnZ6: Der Wert $\zeta(2)$

Stichworte: Drei Methoden zur Herleitung von $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$: 1.) Fourierentwicklung der Standardparabel auf $]-\pi,\pi[$, 2.) zweidimensionale Substitutionsregel für $\int_0^1\int_0^1 \frac{dx\,dy}{1-xy}$, 3.) Partialbruchzerlegung von $\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}$ oder verwandten Funktionen

6.1. Einleitung: Nach 5.5 konvergiert die ζ-Reihe $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}$ für $s=\sigma>1$. Für den Wert $\zeta(2)$ kann man auf vielerlei Art $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$ herleiten. Kein Beweis ist jedoch völlig elementar, wir stellen hier drei Methoden vor.

1. Methode (für Elektroingenieure): Die Entwicklung von $f(x)=x^2$, $-\pi\leq x\leq\pi$ in eine Fourierreihe:



← periodische Fortsetzung von f auf $\mathbb{R}$

Satz (Fouriertheorie): Ist eine 2π-periodische Funktion f in $]-\pi,\pi[$ st. dfb. und stückweise monoton, so konvergiert die Fourierreihe $\frac{a_0}{2}+\sum_{\nu\geq1}(a_\nu\cos(\nu x)+b_\nu\sin(\nu x))$, wo $a_\nu=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(\nu x)\,dx$, und $b_\nu=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(\nu x)\,dx$, für $x\in\,]-\pi,\pi[$ gegen $f(x)$, und für $x=\pi$ gegen $\frac{1}{2}(f(x-0)+f(x+0))$. [o. Bew.]

Da die Fkt. gerade ist, ist $b_\nu=0$ für alle ν. Weiter ist $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\,dx=\frac{2}{3}\pi^2$.

Für die a_ν mit $\nu\geq1$ erhält man

$$a_\nu=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos(\nu x)\,dx=\frac{2}{\pi}\Big(\underbrace{\frac{x^2}{\nu}\sin(\nu x)\Big|_0^\pi}_{=0}-\frac{2}{\nu}\int_0^\pi x\sin(\nu x)\,dx\Big)$$

$$=-\frac{4}{\pi\nu}\cdot\int_0^\pi x\sin(\nu x)\,dx=-\frac{4}{\pi\nu}\Big(\frac{-x}{\nu}\cos(\nu x)\Big|_0^\pi-\underbrace{\int_0^\pi -\frac{1}{\nu}\cos(\nu x)\,dx}_{=0}\Big)=-\frac{4}{\pi\nu}\cdot\frac{(-\pi)}{\nu}\underbrace{\cos(\pi\nu)}_{=(-1)^\nu}=\frac{4}{\nu^2}\cdot(-1)^\nu.$$

Die Funktion f erfüllt die genannten Bedingungen des Satzes. Daher gilt $f(x)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{\nu\geq1}\frac{(-1)^\nu}{\nu^2}\cdot\cos(\nu x)$, für $x=\pi$ erhält man, da f bei π stetig ist,

$$\pi^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{\nu\geq1}\frac{(-1)^\nu}{\nu^2}\cdot(-1)^\nu=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{\nu\geq1}\frac{1}{\nu^2},$$

also $\frac{\pi^2}{6}=\sum_{\nu\geq1}\frac{1}{\nu^2}$.

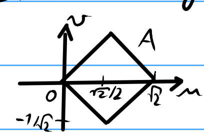
2. Methode: Integration einer Funktion in zwei Variablen (mit mehrdimensionaler Substitutionsregel).

Setze $I := \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy}\,dx\,dy := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{1-xy}\,dx\,dy$.

Die Zahl $I \in \mathbb{R}$ ist der gesuchte Wert $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$,
denn Entwicklung von $\frac{1}{1-xy}$ in eine geometrische Reihe zeigt

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \sum_{n\geq 0} (xy)^n \,dx\,dy = \sum_{n \geq 0} \int_0^1 x^n dx \int_0^1 y^n dy = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \zeta(2).$$

Führen nun eine Substitution durch. Erinnern an Analysis 2, die mehrdim. Substitutionsregel:
Sei $\Phi: G \to \mathbb{R}^n$, $G \subset \mathbb{R}^n$, Φ inj. st. db., $\forall x \in G: \det \Phi'(x) \neq 0$, $A \subseteq G$ kp. & messbar, $f: \Phi(A) \to \mathbb{R}$ stetig.
Dann: $\int_{\Phi(A)} f(x)\,dx = \int_A f(\Phi(u))\,|\det \Phi'(u)|\,du$.



Hier sei $\Phi: A \to]0,1[^2$ mit $A := \{(u,v);\ 0 < u < \sqrt{2},\ |v| < \min(u, \sqrt{2}-u)\}$

$\Phi\binom{u}{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\binom{u}{v}$ die Drehung von A um $\frac{\pi}{4}$, also ist Φ bijektiv.

Die Funktionaldeterminante ist 1, da $\Phi'\binom{u}{v} = \begin{pmatrix} \partial\Phi_1/\partial u & \partial\Phi_1/\partial v \\ \partial\Phi_2/\partial u & \partial\Phi_2/\partial v \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist.

Mit $f(x,y) = \frac{1}{1-xy}$ ist $f\left(\Phi\binom{u}{v}\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}(u-v)(u+v)} = \frac{2}{2-u^2+v^2}$.

Somit ist $I = 2\int_A \frac{1}{2-u^2+v^2}\,du\,dv$

$$= 4\int_0^{\sqrt{2}/2}\left(\int_0^u \frac{dv}{2-u^2+v^2}\right)du + 4\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}}\left(\int_0^{\sqrt{2}-u} \frac{dv}{2-u^2+v^2}\right)du.$$

Mit $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$ folgt

$u = \sqrt{2}\sin\varphi$, $\frac{du}{d\varphi} = \sqrt{2}\cos\varphi$, $\sqrt{2-u^2} = \sqrt{2}\cos\varphi$

$u = \sqrt{2}\cos(2\varphi)$, $\frac{du}{d\varphi} = -2\sqrt{2}\sin(2\varphi)$, $\sqrt{2}-u = 2\sqrt{2}\sin^2(\varphi)$, $\sqrt{2-u^2} = 2\sqrt{2}\sin\varphi\cos\varphi$

$$I = 4\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{\sqrt{2-u^2}}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{2-u^2}}\right)du + 4\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2-u^2}}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2-u^2}}\right)du$$

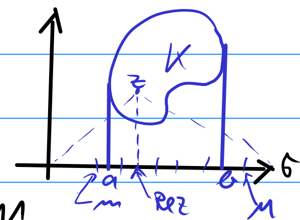
$$= 4\int_0^{\pi/6} \frac{1}{\sqrt{2}\cos\varphi}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}\sin\varphi}{\sqrt{2}\cos\varphi}\right)\sqrt{2}\cos\varphi\,d\varphi + 4\int_{\pi/6}^{0} \frac{1}{\sqrt{2}\sin(2\varphi)}\arctan\left(\frac{2\sqrt{2}\sin^2\varphi}{2\sqrt{2}\sin\varphi\cos\varphi}\right)(-2\sqrt{2})\sin(2\varphi)\,d\varphi$$

$$= 4\int_0^{\pi/6} \varphi\,d\varphi + 4\int_0^{\pi/6} (2\varphi)\,d\varphi = 4\cdot\frac{1}{2}\varphi^2\Big|_0^{\pi/6} + 4\cdot\varphi^2\Big|_0^{\pi/6} = 2\cdot\frac{\pi^2}{6^2} + 4\cdot\frac{\pi^2}{6^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

3. Methode: Partialbruchzerlegung von $\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}$

(1) Beh.: Für $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ konvergiert die Reihe $g(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(z-n)^2}$ absolut,
die Summe ist damit wohldefiniert,
und kgt. gleichmäßig auf jedem Kompakten $K\subseteq\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$.

Bew.: Sei $a:=\min\{\operatorname{Re} z;\ z\in K\}$, $b:=\max\{\operatorname{Re} z;\ z\in K\}$,
$m+1:=\min \mathbb{Z}\cap[a,b]$, $M-1:=\max\mathbb{Z}\cap[a,b]$.
Sei $\varepsilon>0$ mit $\operatorname{dist}(K,\mathbb{Z})\ge\varepsilon>0$.



Für $z\in K$ ist $\begin{cases} |z-n|\ge|\operatorname{Re}(z-n)|\ge n-M, & \text{falls } n>M,\\ |z-n|\ge|\operatorname{Re}(z-n)|\ge m-n, & \text{falls } n<m,\end{cases}$

und somit $\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(z-n)^2}\right| \le \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\frac{1}{(z-n)^2}\right| \le \sum_{n<m}\frac{1}{(m-n)^2}+\sum_{m\le n\le M}\frac{1}{|z-n|^2}+\sum_{n>M}\frac{1}{(n-M)^2}$

$\le 2\underbrace{\sum_{n\ge1}\frac{1}{n^2}}_{\text{kgt.}}+(M-m+1)\cdot\frac{1}{\varepsilon^2}$ für alle $z\in K$, d.h. glm. Kgz. auf K.

Also auch absolut in jedem $z\in K$, also in $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$. □

(2) Beh.: $f(z):=\frac{\pi^2}{(\sin(\pi z))^2}$ für $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$, und g sind meromorph auf $\mathbb{C}$.

Bew.: g ist GW einer auf jedem Kompaktum glm. kgt. Folge meromorpher Funktionen, somit selbst meromorph (→ s. Funktionentheorie).
Die El. von $\mathbb{Z}$ sind Pole 2. Ordnung von f, denn für $z\to0$ ist
$\lim_{z\to0}\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}\cdot z^2 \overset{\text{dH}}{=} \lim_{z\to 0}\frac{2\pi^2 z}{2\pi\cos(\pi z)\sin(\pi z)}=1$, denn $\lim_{z\to0}\frac{\pi z}{\sin(\pi z)}=1$.
Nun ist f periodisch mit Periode 1 (vgl. (3)), also ist f meromorph. □

(3) Beh.: f und g sind periodisch mit Periode 1.

Bew.: $f(z+1)=\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi(z+1))}=\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z+\pi)}=\frac{\pi^2}{(-\sin(\pi z))^2}=f(z)$,

$g(z+1)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(z+\underbrace{1-n}_{-(n-1)})^2}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(z-n)^2}=g(z)$ für alle $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$. □

(4) Beh.: $\forall\varepsilon>0\ \exists y>0\ \forall z\in\mathbb{C},\ 0\le\operatorname{Re}z\le1,\ |\operatorname{Im}z|\ge y: |f(z)|\le\varepsilon$ und $|g(z)|\le\varepsilon$.

Bew.: Für $z=\sigma+it$ mit $0\le\sigma\le1$ und $|t|\ge y$ gilt

$|g(z)|\le\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{|z-n|^2}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(\sigma-n)^2+t^2}=\sum_{n\le0}\frac{1}{n^2+t^2}+\sum_{n\ge1}\frac{1}{(n-1)^2+t^2}$

$n-\sigma\ge n-1$, $n\ge1$ ✓

$|\sigma-n|\ge|n|$, $n=0$ ✓
$n\le-1$: $|\sigma-n|=\sigma-n\ge-n=|n|$ ✓

$$= \frac{2}{t^2} + 2\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+t^2} \overset{|t|\geq y}{\leq} \frac{2}{y^2} + 2\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+y^2} \underset{(n+y)^2 = n^2+y^2+2ny \leq 2(n^2+y^2)}{\leq} \frac{2}{y^2} + 2\sum_{n\geq 1} \frac{2}{(n+y)^2}$$

$$\leq \frac{2}{y^2} + 4\sum_{n>y} \frac{1}{n^2} \xrightarrow[y\to\infty]{} 0.$$

Weiter $|f(z)| = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \frac{4\pi^2}{|e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}|^2} \leq \frac{4\pi^2}{(|e^{i\pi z}| - |e^{-i\pi z}|)^2} = \frac{4\pi^2}{(e^{-\pi t} - e^{\pi t})^2} \xrightarrow{t\to\pm\infty} 0.$ □

(5) **Beh.:** $d(z) := f(z) - g(z)$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ ist holomorph auf $\mathbb{C}$.

Bew.: Betr. $z = 0$. Dann: $d(z) = f(z) - g(z) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} - \frac{1}{z^2} - \sum_{n\neq 0} \frac{1}{(z-n)^2}$

$$= \pi^2\left(\frac{1}{\sin^2(\pi z)} - \frac{1}{(\pi z)^2}\right) - \underbrace{\sum_{n\neq 0} \frac{1}{(z-n)^2}}_{\text{Kgt. für } z\to 0 \text{ gegen } 2\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}}$$

Mit $\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2(z)} - \frac{1}{z^2}\right) = \frac{1}{3}$, vgl. (9), folgt die Beh., da $d(z)$ konvergiert für $z \to 0$, analog für die anderen $z \in \mathbb{Z}$ wegen der Periodizität. □

(6): **Beh.:** d ist beschränkt.

Bew.: d ist periodisch mit Periode 1. Gen. z.z.: d beschränkt auf $\{z\in\mathbb{C}; 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$.

Zu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ex. $y \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $1 = 2\cdot\frac{1}{2} > |f(z)| + |g(z)| \geq |f(z) - g(z)| = |d(z)|$ für alle z mit $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$ und $|\operatorname{Im} z| \geq y$ nach (4). Weiter ist d nach (5) als hol. Fkt. auf Kompaktum $\{z \in \mathbb{C}; 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1, |\operatorname{Im}(z)| \leq y\}$ beschränkt. □

(7) **Beh.:** $d = 0$

Bew.: d ist auf $\mathbb{C}$ hol. (5) und beschr. (6), nach dem Satz von Liouville (s. Funktionentheorie) also konstant. Aus (4) folgt, dass $|d|$ bel. klein wird, also muss $d = 0$ sein. □

(8) **Beh.:** $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Bew.: Aus (5) folgt $0 = d(z) = \pi^2\Big(\overbrace{\frac{1}{\sin^2(\pi z)} - \frac{1}{(\pi z)^2}}^{z\to 0:\ \to 1/3 \text{ nach } (9)}\Big) - 2A$ für $A := \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$,

also ist $0 = \frac{\pi^2}{3} - 2A$, d.h. $A = \frac{\pi^2}{6}$. □

(9) **Beh.:** $\lim_{u\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2(u)} - \frac{1}{u^2}\right) = \frac{1}{3}$.

Bew.: $\sin(u) = u - \frac{u^3}{6} + O(u^5)$, $\sin^2(u) = u^2 - \frac{1}{3}u^4 + O(u^6)$,

also ist $\frac{1}{\sin^2(u)} - \frac{1}{u^2} = \frac{u^2 - u^2 + \frac{1}{3}u^4 + O(u^6)}{u^2\sin^2(u)} = \frac{\frac{1}{3}u^4 + O(u^6)}{u^2(u^2 + O(u^4))} = \frac{\frac{1}{3} + O(u^2)}{1 + O(u^2)} \xrightarrow{u\to 0} \frac{1}{3}$. □

Bem. zur 3. Methode: Die Methode beruht auf der "Partialbruch-zerlegung" $\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$.

Andere, mathematisch gleichwertige Methoden beruhen auf der Taylorreihenentwicklung von $\frac{1}{z}\operatorname{arctanh}(z)$ (und ihrer Integration) oder der Partialbruchzerlegung von $\pi z\cot(\pi z)$ als
$\pi z\cot(\pi z) = 1 - 2\sum_{n\geq 1} \frac{z^2}{z^2-n^2}$ (und sind nicht viel kürzer aufzuschreiben, werden alle Details beachtet).

Gerade die letztere Formel lässt wegen

$$\pi z\cot(\pi z) - 1 = -2\sum_{n\geq 1}\Big(\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^{2n}}\Big) z^{2n}$$

und

$$\pi z\cot(\pi z) - 1 = \sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!}\pi^{2n} \underbrace{B_{2n}}_{\text{Bernoulli-Zahlen}} z^{2n}$$

noch die Berechnung aller $\zeta(2), \zeta(4), \zeta(6), \ldots$ zu als

$$\zeta(2n) = (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!}\pi^{2n} B_{2n}, \quad n\geq 1.$$