Vorlesung Analytische Zahlentheorie

SoSe '22, hhu
K. Halupczok

AnZ 5: Von zahlentheoretischen Funktionen erzeugte Dirichletreihen

Stichworte: Ableitung von Dirichletreihen, Riemannsche Zetafunktion $\sum_{n\geq 1} \mathbb{1}(n) n^{-s}$ für $\sigma > 1$, Multiplikationssatz für Dirichletreihen und Faltungsprodukt, Beispiele dafür

---

5.1. Einleitung: Dirichletreihen können gliedweise abgeleitet werden. Der Multiplikationssatz bringt das Produkt von Dirichletreihen in Verbindung mit dem Faltungsprodukt der zugehörigen Koeffizientenfolgen.

Nach einem Satz von Weierstraß 4.5 darf eine Reihe holomorpher Funktionen in einem Gebiet mit kompakter Konvergenz dort gliedweise differenziert werden. Somit können Dirichletreihen in ihrem Konvergenzbereichen, den Halbebenen $\{\sigma > \sigma_c\}$, wie folgt differenziert werden.

5.2. Satz: Sei (a_n) eine komplexe Folge und $F(s) = \sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$ die von ihr erzeugte Dirichletreihe mit Konvergenzabszisse σ_c gegeben. Für $k \geq 1$ hat F dort dann die k-te Ableitung $F^{(k)}(s) = (-1)^k \sum_{n\geq 1} a_n \log^k(n)\, n^{-s}$.

Bew.: Mit $\frac{d}{ds}(n^{-s}) = \frac{d}{ds} \exp(-s\log(n)) = -\log(n)\exp(-s\log(n)) = -\log(n)\cdot n^{-s}$ folgt durch gliedweise Differentiation $F'(s) = -\sum_{n\geq 1} a_n \log(n)\, n^{-s}$, und induktiv erhalten wir

$$F^{(k+1)}(s) = \frac{d}{ds}\left(F^{(k)}(s)\right) \overset{\text{Ind.Vor.}}{=} \frac{d}{ds} (-1)^k \sum_{n\geq 1} a_n \log^k(n)\, n^{-s}$$

$$= (-1)^k \sum_{n\geq 1} a_n \log^k(n)(-\log(n))\, n^{-s} = (-1)^{k+1} \sum_{n\geq 1} a_n \log^{k+1}(n)\, n^{-s}. \quad \square$$

Wir behandeln nun einige von speziellen zahlentheoretischen Funktionen $(a_n)_{n\geq 1}$ erzeugte Dirichletreihen $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s}$. Wie die von $\mathbb{1}$ erzeugte Potenzreihe $\sum_{n\geq 0} z^n$, also die geometrische Reihe, eine grundlegende Rolle für die Theorie der Potenzreihen spielt, kommt ebenso der von $\mathbb{1}$ erzeugten Dirichletreihe eine grundlegende Bedeutung zu.

5.3. **Def.:** Sei $\zeta(s) := \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} = \sum_{n\geq 1} \frac{\mathbb{1}(n)}{n^s}$ die von der zahlentheoretischen Funktion $\mathbb{1}$ erzeugte Dirichletreihe.

Die in der Konvergenzhalbebene $\sigma > \sigma_c$ durch die Reihe definierte Funktion $\zeta(s)$ heißt (Riemannsche) Zetafunktion.

5.4. **Folgerung (aus 5.2):** Die Zetafunktion hat die Ableitung $\zeta'(s) = -\sum_{n\geq 1} \frac{\log(n)}{n^s}$, ihre k-te Ableitung lautet $\zeta^{(k)}(s) = (-1)^k \sum_{n\geq 1} \frac{\log^k(n)}{n^s}$.

5.5. **Satz:** Die Dirichletreihe der Zetafunktion konvergiert für $\sigma > 1$.

Da sie bei $s = 1$ divergiert (harmonische Reihe), folgt $\sigma_c = 1$, sowie $\sigma_a = 1$.

Bew.: z.z.: kgz. bei $s = \sigma > 1$. Wir haben $\sum_{n\leq x} \frac{1}{n^\sigma} \leq \sum_{0\leq k\leq L(x)} \sum_{2^k\leq n<2^{k+1}} \frac{1}{n^\sigma} \underset{\boxed{n\geq 2^k}}{\leq} \sum_k \sum_{2^k\leq n<2^{k+1}} \frac{1}{2^{k\sigma}}$

$= \sum_k \underbrace{(2^{k+1} - 2^k)}_{\text{Anzahl Summanden}} \cdot \frac{1}{2^{k\sigma}} = \sum_k 2^k \cdot \frac{1}{2^{k\sigma}} = \sum_k \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\sigma-1}\right)^k$, wo $L(x) = \log_2(x) - 1$ $x < 2^{k+1}$, „dyadisches Intervall"

was für $x \to \infty$ konvergiert wegen $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sigma-1} < 1$ für $\sigma > 1$ (geometrische Reihe). $\square$

5.6 **Bem.:** Der im Beweis benutzte Trick zur Zerlegung des Summationsintervalls $[1, x]$ in sogenannte dyadische Intervalle $[2^k, 2^{k+1}[$, d.h. in Intervalle der Form $[M, 2M[$, wird immer wieder mal verwendet.

Gegeben seien nun zwei zahlentheoretische Funktionen $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, und seien $A(s) = \sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$, $B(s) = \sum_{n\geq 1} b_n n^{-s}$ ihre erzeugenden Dirichletreihen.

Wir erinnern an das Dirichlet-Produkt $c = a * b$ von a und b, welches durch die Formel $c_n = \sum_{d|n} a_d b_{n/d} = \sum_{dk=n} a_d b_k$ gegeben ist.

5.7. **Multiplikationssatz:** Seien $F(s) = \sum a_n n^{-s}$, $G(s) = \sum b_m m^{-s}$ absolut kgt. (in s). Dann hat $H(s) = F(s)G(s)$ die Gestalt $H(s) = \sum c_n n^{-s}$ mit $c_n = \sum_{d|n} a_d b_{n/d}$ (d.h. $c = a * b$). Die Reihe $\sum c_n n^{-s}$ kgt. ebenfalls absolut (in s).

Bew.: Nach dem Produktsatz für Reihen und der vorausgesetzten abs. kgz. kann $F(s)G(s)$ ausmultipliziert und in beliebiger Anordnung aufsummiert werden:

$F(s)G(s) = \sum_{n,m} a_n b_m (nm)^{-s} = \sum_k k^{-s} \sum_{nm=k} a_n b_m = \sum_k c_k k^{-s}$. $\square$

5.8. Bsp.: Für $\sigma > 1$ ergibt sich, da $\tau = \mathbb{1} * \mathbb{1}$, also
$$\sum_{n\geq 1} \tau(n) n^{-s} = \left(\sum_{n\geq 1} 1 \cdot n^{-s}\right) \cdot \left(\sum_{n\geq 1} 1 \cdot n^{-s}\right) = \left(\sum_{n\geq 1} n^{-s}\right)^2 = \zeta^2(s).$$

Aufgrund verschiedener Faltungsidentitäten, die wir in AnZ2 studiert hatten, ergeben sich aus dem Multiplikationssatz mühelos schöne Formeln für Dirichletreihen, welche von zahlentheoretischen Funktionen erzeugt werden.

5.9. Satz: Es bestehen die Formeln

(1) $\sum_{n\geq 1} \tau_k(n) n^{-s} = \zeta^k(s)$, $k \in \mathbb{N}$, für $\sigma > 1$, wo $\tau_k(n) := \sum_{d_1 \cdots d_k = n} 1$,

(2) $\sum_{n\geq 1} \mu(n) n^{-s} = \frac{1}{\zeta(s)}$, $\sigma > 1$, (3) $\sum_{n\geq 1} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$, $\sigma > 2$.

Bew.: (1): Haben $\tau_k(n) := \mathbb{1} * \mathbb{1} * \ldots * \mathbb{1}$ (k-mal "$*$"). Für $\sigma > 1$ ist damit $\zeta^k(s) = \left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}\right)^k \overset{5.7.}{=} \sum_{n\geq 1} \frac{\mathbb{1} * \ldots * \mathbb{1}}{n^s} = \sum_{n\geq 1} \frac{\tau_k(n)}{n^s}$.

(2): $\zeta(s) \cdot \left(\sum_{n\geq 1} \mu(n) n^{-s}\right) = \left(\sum_{n\geq 1} \mathbb{1}(n) n^{-s}\right)\left(\sum_{n\geq 1} \mu(n) n^{-s}\right) \overset{5.7.}{=} \sum_{n\geq 1} (\mathbb{1} * \mu)(n) \cdot n^{-s} \underset{\mathbb{1} * \mu = \varepsilon}{=} \sum_{n\geq 1} \varepsilon(n) n^{-s} = 1$, jetzt gilt noch zu beachten, dass ζ in $\sigma > 1$ keine Nullstelle hat (AnZ 9/10).

(3): $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{\varphi(n)}{n^s}\right) \cdot \underbrace{\left(\sum_{n\geq 1} \frac{\mathbb{1}(n)}{n^s}\right)}_{= \zeta(s)} \overset{5.7.}{=} \sum_{n\geq 1} \frac{(\varphi * \mathbb{1})(n)}{n^s} \underset{\varphi * \mathbb{1} = \mathrm{id}}{=} \sum_{n\geq 1} \frac{n}{n^s} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{s-1}} = \zeta(s-1)$, zumindest für $\sigma > 2$. □

Selbstverständlich können noch viel mehr solcher Formeln gezeigt werden, die bestimmte Dirichletreihen auf ζ zurückführen. Somit erweist sich das Studium von ζ als grundlegend. Weiter kommt man auch der von-Mangoldt-Fkt. Λ, eine wichtige Rolle zu, obwohl Λ weder multiplikativ noch additiv ist:

5.10. Def.: Für $n \geq 1$ sei $\Lambda(n) := \log p$, falls $n = p^k$ eine Primpotenz mit $p \in \mathbb{P}$, $k \geq 1$, und $\Lambda(n) := 0$ andernfalls. Diese Abb. $\Lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ heißt von-Mangoldt-Funktion.

5.11. Lemma: Es gilt $\Lambda * \mathbb{1} = \log$.

Bew.: Ist $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$ die PFZ von n, gilt $\Lambda * \mathbb{1}(n) = \sum_{d \mid n} \Lambda(d) = \sum_{j=1}^{r} e_j \log p_j = \log(n)$. □

$\rightarrow d = p_j^t$, für $t = 1, \ldots, e_j$ $= \Lambda(p_j^t)$

5.12. Satz: Für $\sigma > 1$ gilt $\sum_{n\geq 1} \Lambda(n) n^{-s} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$.

Bew.: Aus 5.4 folgt $\sum_{n\geq 1} (\log n) n^{-s} = -\zeta'(s)$. Da $\Lambda * \mathbb{1} = \log$ nach 5.11 folgt $\left(\sum_{n\geq 1} \Lambda(n) n^{-s}\right) \cdot \left(\sum_{n\geq 1} \mathbb{1}(n) n^{-s}\right) \overset{5.7.}{=} \sum_{n\geq 1} \log(n) n^{-s} = -\zeta'(s)$ für $\sigma > 1$. □