AnZ 4
– 1 –

Vorlesung Analytische Zahlentheorie

SoSe'22, hhu
K. Halupczok

AnZ 4: Dirichletreihen

Stichworte: Dirichletreihe, Konvergenztrichter und -halbebene, Konvergenzabszisse σ_c, absolute Konvergenzabszisse σ_a, Formeln für σ_c und σ_a, Identitätssatz

---

4.1. Einleitung: Während bei Potenzreihen die Konvergenzbereiche Kreise in $\mathbb{C}$ sind, sind es bei Dirichletreihen nach rechts geöffnete Halbebenen.

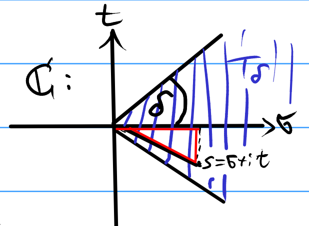
4.2. Notationsvereinbarung: Das Argument einer Dirichletreihe sei stets mit $s \in \mathbb{C}$ bezeichnet, wobei $s = \sigma + it$ sei. Mit $\sigma = \operatorname{Re}(s)$ sei also der Realteil, mit $t = \operatorname{Im}(s)$ der Imaginärteil bezeichnet.

4.3. Def: Eine Dirichletreihe ist eine unendl. Reihe der Form $D(s) = \sum_{n \geq 1} a_n n^{-s}$, die $a_n \in \mathbb{C}$, $s \in \mathbb{C}$.
Es stellt sich die Frage nach dem Konvergenzbereich.

4.4. Satz (Kgz.trichter): Es sei $D(s)$ in einem Pkt. s_0 konvergent. Dann konvergiert $D(s)$ gleichmäßig in dem Konvergenztrichter / Winkelraum / Stolz-Gebiet (engl. Stolz-domain) $|\arg(s-s_0)| < \delta$ für festes $\delta > 0$, wo $\delta < \frac{\pi}{2}$,
d. h. in $T_\delta := \{ s \in \mathbb{C};\ |\arg(s-s_0)| < \delta \}$.
Die Fkt. $D(s)$ ist demnach in $\{ \sigma > \operatorname{Re}(s_0) \}$ holomorph.

Bew.: • Zunächst sei $s_0 = 0$, d.h. $\sum_{n \geq 1} a_n$ konvergiere,
bzw. $r_N := \sum_{n > N} a_n \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$.

Für $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ beschreibt $T_\delta = \{ s \in \mathbb{C};\ |\arg(s)| < \delta \}$ einen "Trichter" mit Spitze bei $s = 0$ und Öffnungswinkel 2δ, der nach rechts geöffnet ist.



$\sigma + it \in T_\delta$
$\Rightarrow \cos(\arg s) = \frac{\sigma}{|s|}$
$\geq \cos(\delta)$
cos mon. fallend in $[0, \pi/2]$

Sei $1 \le M < N$ (und $M, N \in \mathbb{N}$). Dann gilt für $\sigma > 0$:

$$\sum_{n=M}^{N} a_n n^{-s} = \sum_{M\le n\le N} \frac{r_{n-1}-r_n}{n^s} = \sum_{M\le n\le N}\overbrace{\frac{r_{n-1}}{n^s}}^{\text{Subst.: } \ell=n-1} - \sum_{M\le n\le N}\frac{r_n}{n^s} = \sum_{M-1\le \ell\le N-1}\frac{r_\ell}{(\ell+1)^s} - \sum_{M\le n\le N}\frac{r_n}{n^s}$$

$$= \underbrace{\frac{r_{M-1}}{M^s}}_{\text{für } \ell=M} - \underbrace{\frac{r_N}{(N+1)^s}}_{\text{für } \ell=N} - \sum_{M\le n\le N} r_n\left(\frac{1}{(n+1)^s} - \frac{1}{n^s}\right).$$

(Bzw. mit diskreter part. Σ 3.21.(2) machbar)

Nun ist $\left|\frac{1}{(n+1)^s}-\frac{1}{n^s}\right| = \left|s\int_n^{n+1}\frac{du}{u^{s+1}}\right| \le |s|\int_n^{n+1}\frac{du}{u^{\sigma+1}} = \frac{|s|}{\sigma}\left(\frac{1}{n^\sigma}-\frac{1}{(n+1)^\sigma}\right).$

da $(u^{-s})' = -s u^{-s-1}$

Beachten: $|u^s| = |u^{\sigma+it}| = |u^\sigma|\cdot|u^{it}| = u^\sigma$!

Sei nun $\varepsilon>0$. Dann ist $|r_n|\le\varepsilon$ für $n_0(\varepsilon)\le n$, also gilt für $s\in T_\delta\setminus\{0\}$ und $M>n_0(\varepsilon)$ damit

$$\left|\sum_{M\le n\le N}\frac{a_n}{n^s}\right| \le \varepsilon\frac{|s|}{\sigma}\sum_{M\le n\le N}\left(\frac{1}{n^\sigma}-\frac{1}{(n+1)^\sigma}\right) + \overbrace{\frac{\varepsilon}{M^\sigma}+\frac{\varepsilon}{(N+1)^\sigma}}^{\le 2\varepsilon}$$

$$\le \varepsilon\cdot\left(\frac{|s|}{\sigma}\cdot\left(\frac{1}{M^\sigma}-\frac{1}{(N+1)^\sigma}\right)+2\right) \le \varepsilon\underbrace{\left(\frac{1}{\cos(\delta)}+2\right)}_{\text{unabh. von } s}, \quad \text{da } \frac{\sigma}{|s|}\ge\cos(\delta).$$

Damit ist die gleichmäßige Kgz. in T_δ gezeigt.

- Falls Konvergenz bei $s_0\neq 0$ vorliegt, wird durch die Substitution $a_n' = \frac{a_n}{n^{s_0}}$ und die Konvergenz von $\sum_{n\ge1}\frac{a_n'}{n^s}$ bei $s=0$ die z.z. Konvergenztrichteraussage auf voriges zurückgeführt.
- Zur Holomorphieaussage: Für ein in der rechten Halbebene $\{s\in\mathbb{C};\ \sigma>\mathrm{Re}(s_0)\}$ kompaktes Gebiet gibt es ein δ, so dass das Kompaktum im Trichter T_δ liegt. Dort liegt nach obiger Rechnung gleichmäßige Konvergenz vor. Nach dem
aus Funktionentheorie
Weierstraßscher Konvergenzsatz stellt die Fkt. $D(s)$ somit eine holomorphe Fkt. auf der Halbebene dar. □

4.5. Erinnerung an den Weierstraßschen Konvergenzsatz:

Sei $D\subseteq\mathbb{C}$ offen, (f_n) eine auf D lokal gleichmäßig konvergente Folge holomorpher Funktionen und $f=\lim f_n$ die Grenzfunktion. Dann ist auch f holomorph in D und für alle $k\in\mathbb{N}$ konvergiert die Folge der Ableitungen $(f_n^{(k)})_n$ ebenfalls lokal gleichmäßig auf D, und zwar gegen $f^{(k)}$.

aus 4.4.

Stirling: $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ übertrifft jede Potenz von n. Statt $n!$ ist auch n^n möglich.

4.6. **Folgerung:** Eine Dirichletreihe $D(s)$ konvergiert entweder für alle $s \in \mathbb{C}$ (z.B. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!} \cdot n^{-s}$) oder nirgends (z.B. $\sum_{n \geq 1} n! n^{-s}$), oder es ex. ein $\sigma_c \in \mathbb{R}$, so dass Konvergenz in der Halbebene $\{s \in \mathbb{R};\ \mathrm{Re}(s) > \sigma_c\}$ vorliegt (ansonsten), nämlich $\sigma_c := \inf\{\mathrm{Re}(s);\ D(s) \text{ konvergiert}\}$.

4.7. **Satz:** (i) Zu jeder Dirichletreihe $D(s)$ gibt es stets ein $\sigma_c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, so dass $D(s)$ für alle $s = \sigma + it$ mit $\sigma > \sigma_c$ kgt., und für $\sigma < \sigma_c$ div.

(ii) Zu $D(s)$ existiert auch stets ein $\sigma_a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, so dass $D(s)$ für alle $s = \sigma + it$ mit $\sigma > \sigma_a$ absolut kgt., und für $\sigma < \sigma_a$ nicht.

(iii) Man hat, falls $\sigma_c \in \mathbb{R}$, $\sigma_c \leq \sigma_a \leq \sigma_c + 1$.

Bew.: (i): folgt aus Satz 4.4., vgl. 4.6., wenn $\sigma_c := \inf\{\mathrm{Re}(s);\ D(s) \text{ konvergiert}\}$.

(ii): Wie bei (i): Liegt absolute Kgz. bei σ_0 vor, so auch bei $s = \sigma + it$ mit $\sigma \geq \sigma_0$, da $\left|\frac{a_n}{n^s}\right| = \frac{|a_n|}{n^\sigma} = \frac{|a_n|}{n^{\sigma_0}} \cdot \frac{1}{n^{\sigma - \sigma_0}} \leq \frac{|a_n|}{n^{\sigma_0}}$. Betrachte $\{\mathrm{Re}(s);\ D(s) \text{ kgt. absolut}\}$, ist dies $= \emptyset$, so ist $\sigma_a = +\infty$. Ist diese Menge $= \mathbb{R}$, so ist $\sigma_a = -\infty$. Ansonsten setze $\sigma_a := \inf\{\mathrm{Re}(s);\ D(s) \text{ kgt. absolut}\}$.

(iii): • $\sigma_c \leq \sigma_a$ ist klar, denn ist $D(s)$ absolut konvergent, dann auch konvergent.

• Ist $\sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$ bei s_1 kgt., dann ist die Folge $(a_n n^{-s_1})_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt, etwa durch $B > 0$. Für $\varepsilon > 0$ ist dann $\sum_{n \geq 1} |a_n n^{-s_1 - 1 - \varepsilon}| \leq B \underbrace{\sum_{n\geq 1} n^{-1-\varepsilon}}_{= \zeta(1+\varepsilon) \in \mathbb{R}_{>0}}$, d.h. $D(s)$ ist absolut kgt. bei $s_1 + 1 + \varepsilon$.

Da dies für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, folgt $\sigma_a \leq \sigma_c + 1$. s. in AnZ 5.5 □

4.8. **Def.:** σ_c heißt Konvergenzabszisse, σ_a heißt absolute Konvergenzabszisse von $D(s)$.

4.9. **Bsp.:** • Die ζ-Fkt. ist für $\sigma > 1$ das einfachste Bsp. für eine (nicht triv.) Dirichletreihe. Sie hat $\sigma_a = \sigma_c = 1$. (Sie ist in $s = 1$ nicht hol. forts'bar nach Satz von Landau, AnZ 7)

• Die Dirichletreihe $\sum_{n \geq 1} e^n n^{-s}$ kgt. für kein $s \in \mathbb{C}$, hat also $\sigma_c = \sigma_a = \infty$.

• " " $\sum_{n\geq 1} e^{-n} n^{-s}$ kgt. für alle $s \in \mathbb{C}$, hat also $\sigma_c = \sigma_a = -\infty$.

• Alle Dirichletpolynome $\sum_{n \geq 1} a_n n^{-s}$ mit $a_n \neq 0$ nur endlich oft haben $\sigma_c = -\infty$.

• Die Dirichletreihe $\sum_{n \geq 1} (-1)^n n^{-s}$ hat $\sigma_c = 0$, $\sigma_a = 1$, da $\sum_{n\geq 1} |(-1)^n n^{-s}| = \sum_{n \geq 1} n^{-\sigma} = \zeta(\sigma)$ für $\sigma > 1$.

Zu $\sigma_c = 0$: Haben Kgz. von $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \cdot n^{-\sigma}$ für $\sigma > 0$ nach dem Leibniz-Kriterium, aber Divergenz für $\sigma < 0$, da dann $n^{-\sigma}$ keine Nullfolge mehr ist.

4.10. **Bem.:** Auf dem Rand der Kgzabszisse kann alles passieren: Konvergenz oder Divergenz, je nach Dirichletreihe. Die Randpunkte mit Konvergenz müssen nicht alle Randpunkte umfassen, mit Divergenz ebenso, was vergleichbar mit den Konvergenzkreisrandpunkten bei Potenzreihen ist.

4.11. **Bem.:** Der Konvergenzkreisradius einer Potenzreihe $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ wird nach Cauchy-Hadamard berechnet durch $\rho := (\limsup \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$. Eine ähnliche Formel besteht für die Konvergenzabszisse σ_c der Dirichletreihe $D(s) = \sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$:

Satz: Seien $(a_n) \subseteq \mathbb{C}$.

Sei $S_n := \underbrace{\sum_{k\leq n} a_k}_{\text{Partialsumme}}$ und sei $r_n := \underbrace{\sum_{k\geq n+1} a_k}_{\text{Reihenrest}}$, falls $\sum_{k\geq 1} a_k$ konvergiert.

Setze nun $\alpha := \limsup \frac{\log|S_n|}{\log n}$, $\beta := \limsup \frac{\log|r_n|}{\log n}$.

Dann gilt $\sigma_c = \alpha \geq 0$, falls $\sum_{k\geq 1} a_k$ divergiert, ①

und $\sigma_c = \beta \leq 0$, falls $\sum_{k\geq 1} a_k$ konvergiert. ②

Bew.: 1. Fall: $\sum_{k\geq 1} a_k$ divergent.

Dann: $\forall \varepsilon > 0$: $S_N = O(N^{\alpha+\varepsilon})$ $\ulcorner$von $\frac{\log S_N}{\log N} \leq \alpha + \varepsilon \lrcorner$, sei $s \in \mathbb{R}$

und es ist $\sum_{n\leq N} \frac{a_n}{n^s} = S_N N^{-s} + \sum_{n\leq N-1} S_n (n^{-s} - (n+1)^{-s})$ laut diskreter part. Σ 3.21(2) (mit $C=0$) und $a_0 = 0$)

$$= O(N^{\alpha+\varepsilon-s}) + \sum_{n\leq N-1} O(n^{\alpha+\varepsilon-s-1}),$$

was für $s > \alpha$ mit $N \to \infty$ konvergiert ($\varepsilon > 0$ klein).

Für jedes $s \in \mathbb{C}$ mit Divergenz von $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ gilt somit $\alpha \geq \mathrm{Re}(s)$, dies zeigt die Beh. ①.

2. Fall: $\sum_{k\geq 1} a_k$ konvergent. Dann: $\forall \varepsilon > 0$: $r_N = O(N^{\beta+\varepsilon})$ $\ulcorner$von $\frac{\log r_N}{\log N} \leq \beta + \varepsilon \lrcorner$, sei $s \in \mathbb{R}$,

und es ist $\sum_{n\leq N} \frac{a_n}{n^s} = \underbrace{S_N}_{\leadsto \text{ersetze: } S_N - \sum_{k\geq 1} a_k} N^{-s} - \sum_{n\leq N-1} \underbrace{S_n}_{\leadsto \text{ersetze: } S_n - \sum_{k\geq 1} a_k} (n^{-s} - (n+1)^{-s}) = -r_N N^{-s} + \sum_{n\leq N-1} r_n (n^{-s} - (n+1)^{-s}) + O(1)$

$$= O(N^{\beta+\varepsilon-s}) + \sum_{n\leq N-1} O(n^{\beta+\varepsilon-s-1}),$$

was für $s > \beta$ mit $N \to \infty$ konvergiert.

Für jedes $s \in \mathbb{C}$ mit Divergenz von $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ gilt somit $\beta \geq \mathrm{Re}(s)$, dies zeigt die Beh. ②. $\square$

Wie für Potenzreihen gibt es auch für Dirichletreihen einen

4.12. Identitätssatz: Seien $F(s)=\sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$, $G(s)=\sum_{n\geq 1} b_n n^{-s}$ Kgt. für $\sigma > \sigma_c$.
Es gebe eine Folge $(s_m)=(\sigma_m+i\tau_m)_{m\in\mathbb{N}}$ mit $\sigma_m \xrightarrow{m\to\infty} \infty$ und
$\forall m\in\mathbb{N}: F(s_m)=G(s_m)$. Dann gilt $\forall n\in\mathbb{N}: a_n=b_n$.

Bem.: Dieser Satz wird in der Literatur gelegentlich falsch wiedergegeben. Es genügt nicht, eine Übereinstimmung von F und G auf Kompakta vorauszusetzen (wie das für Potenzreihen gilt). Man benötigt die bestimmte Divergenz der Realteile einer Punktfolge mit Übereinstimmung. Manchmal wird er auch falsch/unzureichend bewiesen, z.B. in [Brüdern, S.26], mit "leichter Induktion über n", die nicht funktioniert. Bei [Serre, A Course in Arithmetic, S.67] ist der induktive Beweis aber korrekt.

Bew.: 1.) Setze $c_n=a_n-b_n$, dann verschwindet $H(s)=\sum_{n\geq 1} c_n n^{-s}$ bei allen $s=s_m$.
Sei OE H bei $s=0$ absolut Kgt. ⌜Sonst betrachte $c_n^*=c_n n^{-s^*}$ für s^* geeignet.⌟
Weiter sei OE $\forall m: \sigma_m > 1$.

2.) Ann.: $\exists n_0: c_{n_0}\neq 0$, n_0 sei dabei minimal gewählt. Dann gilt $\forall m\in\mathbb{N}$:

$$0<\frac{|c_{n_0}|}{n_0^{\sigma_m}} \leq \sum_{n>n_0} |c_n| n^{-\sigma_m} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{abs. Kgt.}\\ \text{von } H \text{ bei } 0 \leadsto \text{die } (c_n) \text{ beschränkt}}}{\leq} B\sum_{n>n_0} n^{-\sigma_m} < B\int_{n_0}^{\infty} t^{-\sigma_m}\,dt = B\,\frac{n_0^{1-\sigma_m}}{\sigma_m-1},$$

also

$$\sigma_m - 1 \leq B\,|c_{n_0}|^{-1} n_0,$$

was für $m\to\infty$ der Vor. $\sigma_m\to\infty$ widerspricht.

□