Vorlesung Analytische Zahlentheorie

SoSe'22, hhu
K. Halupczok

AnZ 30: Zusammenfassung

Einleitung: Wir fassen Hauptergebnisse über Primzahlen, bekannt aus dieser Vorlesung und weiterführenden Forschungen, tabellarisch zusammen.

Primzahlmenge $\mathbb{P}$, PZ-Zählfunktion $\pi(x)$	Primzahlmenge $\mathbb{P}_{a,q}=\{p\in\mathbb{P};\ p\equiv a(q)\}$, PZ-Zählfunktion $\pi(x;q,a)$, wo $(a,q)=1$
$\#\mathbb{P}=\infty$: laut Euler AnZ 1 Methode: zeige $\sum_{p\le x}\frac{1}{p}\xrightarrow{x\to\infty}\infty$ $(\gg\log\log x)$	$\#\mathbb{P}_{a,q}=\infty$, insb. $\exists\, p\equiv a(q)$ prim: laut DPZS AnZ 27.2 Methode: zeige $\delta_{\mathbb{P}}(\mathbb{P}_{a,q})=\frac{1}{\varphi(q)}$
$\frac{x}{\log(x)}\ll\pi(x)\ll\frac{x}{\log(x)}$ laut Tschebyschev Methode: • o.S.: $\vartheta(x)\ll x$ mit $\prod_{m+1<p\le 2m+1}p\ \Big\vert\ \binom{2m+1}{m}$ • u.S.: $\psi(x)\gg x$ mit Tsch.-Fkt. $f(x)$	$\frac{x}{\varphi(q)\log(x)}\ll\pi(x;q,a)\ll\frac{x}{\varphi(q)\log(x)}$ (nicht behandelt; folgt aus dem PZS in APen)
$\pi(x)\sim\frac{x}{\log(x)}\sim li(x)$ laut PZS Methode: Newmans Taubersatz, verwende $\zeta(1+it)\neq 0$ für alle $t\in\mathbb{R}$	$\pi(x;q,a)=\frac{1}{\varphi(q)}\,li(x)\cdot(1+o_q(1))$ laut PZS in APen Methode: Newmans Taubersatz, verwende $L(1+it,\chi)\neq 0$ für alle $t\in\mathbb{R}$
in ZT II: $\pi(x)=li(x)+O\left(\frac{x}{\exp(c\sqrt{\log x})}\right)$ laut PZS mit Restglied Methode: Perronsche Formel verwende nullstellenfreies Gebiet $\{s=\sigma+it;\ \sigma\ge 1-\frac{A}{\log t},\ \lvert t\rvert>e\}$	$\pi(x;q,a)=\frac{1}{\varphi(q)}\,li(x)+O_q\left(\frac{x}{\exp(c\sqrt{\log x})}\right)$ laut PZS in APen mit Restglied analog, verwende nullstellenfreies Gebiet $\{s=\sigma+it;\ \sigma\ge 1-\frac{A}{\log t},\ \lvert t\rvert>e\}$

Primzahlmenge $\mathbb{P}$,	Primzahlmenge $\mathbb{P}_{a,q} = \{p \in \mathbb{P};\ p \equiv a(q)\}$,
PZ-Zählfunktion $\pi(x)$	PZ-Zählfunktion $\pi(x;q,a)$, wo $(a,q)=1$

Bestes bekanntes unkonditionelles Ergebnis mit Vinogradov-Korobov-nullstellenfreien Gebiet:

$$\pi(x) = li(x) + O\left(x \exp(-c_0 (\log x)^{\frac{3}{5}} (\log\log x)^{-\frac{1}{5}}\right), \quad \pi(x;q,a) = \frac{li(x)}{\varphi(q)} + O_q\left(x \exp(-c_0 (\log x)^{\frac{3}{5}} (\log\log x)^{-\frac{1}{5}}\right)$$

Sei $\varepsilon > 0$ fest.

Riemannsche Vermutung (RH):	Verallgemeinerte RH (GRH):
$\pi(x) = li(x) + O(x^{1/2+\varepsilon})$	$\pi(x;q,a) = \frac{li(x)}{\varphi(q)} + O(x^{1/2+\varepsilon})$ für alle $q \leq x$
	[(GRH) für alle L-Funktionen zu $\chi(q)$.]

Weitergehende Vermutung (von Montgomery): $\pi(x;q,a) = \frac{li(x)}{\varphi(q)} + O_\varepsilon\left(\frac{x^{1/2+\varepsilon}}{\varphi(q)}\right)$ für alle $q \leq x$.

Explizite Formeln: Sei $\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$, $\psi(x,\chi) = \sum_{n \leq x} \chi(n)\Lambda(n)$, $\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & n = p^k, \\ 0, & \text{sonst}. \end{cases}$

- Für $\psi_0(x) := \frac{1}{2} \cdot \lim_{\varepsilon \to 0} (\psi(x+\varepsilon) + \psi(x-\varepsilon))$, $x \gg 1$, $T \geq 2$, gilt
$$\psi_0(x) = x - \sum_{\substack{\rho,\ \zeta(\rho)=0 \\ |\operatorname{Im}\rho| \leq T}} \frac{x^\rho}{\rho} - \log(2\pi) - \frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) + O\left((\log x)\min\left(1, \frac{1}{T\langle x\rangle}\right) + \frac{x}{T}\log^2(xT)\right),$$
$\langle x\rangle$ = Abst. von x zur nächsten Primpotenz.

- Für $\psi_0(x,\chi) := \frac{1}{2} \cdot \lim_{\varepsilon \to 0} (\psi(x+\varepsilon,\chi) + \psi(x-\varepsilon,\chi))$, χ prim. Char. mod $q > 1$, $x \gg 1$, $T \geq 2$, gilt
$$\psi_0(x,\chi) = -\sum_{\substack{\rho,\ L(\rho,\chi)=0 \\ |\operatorname{Im}\rho| \leq T}} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{1}{2}\log(x-1) - \frac{\chi(-1)}{2}\log(x+1) + C(\chi)$$
$$+ O\left((\log x)\min\left(1, \frac{1}{T\langle x\rangle}\right) + \frac{x}{T}\log^2(qxT)\right),$$
wo $C(\chi) := \frac{L'}{L}(1,\bar\chi) + \log\frac{q}{2\pi} + \Gamma'(1)$.

Ende der Vorlesung