Vorlesung Analytische Zahlentheorie

SoSe'22, hhu
K. Halupczok

AnZ 3: Grundlegende Werkzeuge

Stichworte: Asymptote, asymptotische Funktion, (Bachmann-)Landau-Symbole O und o, implizite Konstante, $\sim$, asymptotische Formeln mit Hauptterm und Fehlerterm, Vinogradov-Symbol $\ll$, partielle Summation, Eulersche Summenformel

---

3.1. Einleitung: Wir führen Werkzeuge zur Beschreibung von Asymptotiken ein: die O-Notation und Vinogradov-Notation. Zur Aufstellung asymptotischer Formeln sind partielle Summation bzw. die Eulersche Summenformel nützliche Werkzeuge.

3.2. Asymptoten: In der Analysis wird oft das asymptotische Verhalten von Funktionen ausgedrückt, wie z.B. $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f_1(x) = 3x+4+\frac{1}{x}$$
hat die Asymptote $g_1(x) = 3x+4$, weil $f_1(x) - g_1(x) = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$ gilt, also für große x kann $f_1(x) \approx g_1(x)$ approximiert werden.
Auch bei der Funktion $f_2(x) : \mathbb{R}\setminus\{5\} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = \frac{1}{x-5} + x^2$ hat man die Gerade mit der Glg. $x=5$ als Asymptote, wenn $x \to 5$ betrachtet wird. Für große x gilt hingegen $f_2(x) \approx x^2$, d.h. f_2 unterscheidet sich für große x nur wenig von der Standardparabel, da $f_2(x) - x^2 \xrightarrow{x\to\infty} 0$.
Der Begriff "Asymptote" bezeichnet zunächst eine Gerade. Aber wie im vorigen Beispiel würde man $g_2(x) = x^2$ eine Asymptote bzw. asymptotische Funktion nennen. Es spielt auch eine Rolle, wie gut die Asymptote die Funktion beschreibt: Bei $f_3(x) = x^2 + \frac{1}{x^3}$ ist die Approximation an x^2 deutlich besser. Für die Funktion $f_4(x) = 3^x + \frac{1}{x}$ kann weiter ein exponentielles Wachstum für $x \to \infty$ erkannt werden, weil $f_4(x) - 3^x \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$, und $3^x = \exp(x \log(3))$ ist. Für die Funktion $f_5(x) = \exp(2\sqrt{\log x})$ erstmal nicht, nur höchstens exponentielles Wachstum wegen $\exp(2\sqrt{\log x}) \underset{\text{für } x \geq x_0}{\leq} \exp(\log(x)) = x$.

AnZ 3
-2-

3.3. Für die Beschreibung von Asymptotiken wie in vorigen Beispielen führen wir die (Bachmann-)Landau-Symbolik ein. Diese Symbolik hat ihren Weg auch in andere Gebiete der Mathematik, in Anwendungen und vor allem in die Informatik gefunden. Sie ist auch als "O-Notation" bekannt. Ihren Ursprung hat diese Notation also in der analytischen Zahlentheorie. :)

3.4. Def.: Für Funktionen $f:[c_0,\infty)\to\mathbb{C}$, $g:[c_0,\infty)\to\mathbb{R}_{\geq 0}$, $c_0\in\mathbb{R}$,
schreibt man $f(x)=O(g(x))$ für $x\geq c_0$

Groß O

oder: $f=O(g)$ für $x\geq c_0$,

wenn es ein $C>0$ gibt (für "$x\to\infty$")
mit $|f(x)|\leq C\cdot g(x)$ für alle $x\geq c_0$.

[D.h. wenn $\frac{f}{g}$ auf $[c_0,\infty)$ beschränkt ist, sofern g dort nirgends $=0$ ist.]

Die Konstante C wird auch implizite Konstante genannt.
Sprechweise: f ist "groß O von $g(x)$" bzw. f ist (höchstens) von der Größenordnung g.

3.5. Bem.: Die Gleichheit bzw. "ist"-Sprechweise ist keine echte Gleichheit.
In der Notation wird die Konstante C nicht mitgenannt
(weil unerheblich für das, was man sagen will).

3.6. Bsp.: • $\frac{1}{x^2}=O\left(\frac{1}{x-1}\right)$ ist richtig mit impliziter Konstante
$C=1$ (und $c_0>1$), aber auch mit $C'>1$.

• Mit $\frac{x^{1.5}-x+1}{x^{2.5}-x^{1.5}}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^{1.5}}=\frac{1}{x-1}+O\left(\frac{1}{x^{1.5}}\right)$

und $\frac{x^2-x+1}{x^3-x^2}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x-1}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)$

wird ausgedrückt, dass die Approximation von $\frac{x^{1.5}-x+1}{x^{2.5}-x^{1.5}}$ an $\frac{1}{x-1}$ schlechter/schwächer ist als die von $\frac{x^2-x+1}{x^3-x^2}$ an $\frac{1}{x-1}$.

• Im vorigen Bsp. will man also auch die "Güte" der Approximation beschreiben können. Es ist zwar $\frac{1}{x^2}=O\left(\frac{1}{x^{1.5}}\right)$, aber nicht $\frac{1}{x^{1.5}}=O\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Das so auszudrücken, ist unhandlich. Dafür nimmt man folgende Notation.

3.7. **Def.:** Für Funktionen $f:[c_0,\infty)\to\mathbb{C}$, $g:[c_0,\infty)\to\mathbb{R}_{\geq 0}$, $c_0\in\mathbb{R}$,
Klein o — schreibt man $f(x) = o(g(x))$
⌜oder: $f = o(g)$⌟,
wenn $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ gilt.

Sprechweise: f ist "Klein o von $g(x)$",
bzw. f ist von kleinerer Größenordnung als g.

3.8. **Bem.:** Mit dem Symbol $\lim\limits_{x\to\infty}\dots$ ist der uneigentliche Grenzwert gemeint.
Erinnerung an die Analysis: Für jede (nach $+\infty$) bestimmt divergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ muss dafür $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = 0$ gelten. Dabei heißt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (nach $+\infty$) bestimmt divergent, falls $\forall K>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\geq n_0:\ x_n\geq K$.

3.9. **Bsp.:** • Mit $\frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x^{1.5}}\right)$ ist die bessere Approximation im 2. Bsp. von 3.6 ausdrückbar. Man kann nun auch z.B. $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x-1} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ schreiben.
Gerade hier will man noch ausdrücken, für welchen Grenzübergang die Formel gemeint ist, dann schreibt man "für $x\to\infty$" hinzu.
• Man beachte etwa, dass etwa $\frac{1}{x-10} + (x-10)^2 = \frac{1}{x-10} + o(x-10)$ für $x\to 10$ eine sinnvolle Formel wird. Für $x\to\infty$ ist sie falsch.

3.10. **Asymptotische Formeln:** $f:[c_0,\infty)\to\mathbb{C}$, $g:[c_0,\infty)\to\mathbb{R}_{\geq 0}$, $c_0\in\mathbb{R}$.
Für eine weitere Funktion $\tilde{f}:[c_0,\infty)\to\mathbb{C}$,
· schreibt man $f(x) = \tilde{f}(x) + O(g(x))$ für $x\geq c_0$ (bzw. $x\to\infty$),
wenn $f(x)-\tilde{f}(x) = O(g(x))$ für $x\geq c_0$ gilt; ″
· schreibt man $f(x) = \tilde{f}(x) + o(g(x))$ für $x\geq c_0$, ″
wenn $f(x)-\tilde{f}(x) = o(g(x))$ gilt. ″

3.11. **Bem.:** Der Term g wird als (maximal denkbare) Größe des Fehlerterms interpretiert, er gibt den Fehler sozusagen "quantitativ" an.
Man nennt $f-\tilde{f}$ den Fehlerterm / Restterm / das Restglied der Approximation $f\approx\tilde{f}$, und $\tilde{f}$ den Hauptterm.
Eine solche asymptotische Formel macht nur Sinn, wenn der Fehlerterm von kleinerer Größenordnung als der Hauptterm ist, d.h. wenn $g = o(\tilde{f})$ gilt. Dann gilt $g(x) = \varepsilon(x)\cdot\tilde{f}(x)$, wobei $\varepsilon(x)\xrightarrow{x\to\infty}0$ ist.

3.12. **Zum Unterschied der O- und o-Symbole:**

- $f(x) = O(1)$ besagt: f ist beschränkt, d.h. $\exists K>0\ \forall x \geq c_0: |f(x)| \leq K$
- $f(x) = o(1)$ besagt: $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, d.h. $\forall \varepsilon>0\ \exists x_0 \geq c_0\ \forall x \geq x_0: |f(x)| < \varepsilon$.

3.13. **Zusätze zur O- und o-Notation:**

- Analog mögen die Beziehungen
  $f(x) = O(g(x))$ bzw. $f(x) = o(g(x))$
  auch für $x \to a+$ oder $x \to a-$ oder $x \to a$
  definiert sein, wobei $g(x) \geq 0$ für x nahe a vorausgesetzt ist.
- Manchmal hängt die im O-Symbol implizierte Konstante auch von Parametern ab. Diese können zur Verdeutlichung an das O-Symbol als Index angehängt werden, etwa $O_\varepsilon(f(x))$. Hängt die Konstante nicht von anderen Parametern ab, ist die Abschätzung gleichmäßig, dann spricht man von einer absoluten Konstanten.

3.14. **Def.: Vinogradov-Notation:** $\ll\ ,\ \gg$

Seien $f: [c_0,\infty) \to \mathbb{C}$, $g: [c_0,\infty) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $c_0 \in \mathbb{R}$.
Dann schreiben wir $f(x) \ll g(x)$, falls $f(x) = O(g(x))$,
und $f(x) \gg g(x)$, falls $g(x) = O(f(x))$.

3.15. **Bem.:** - Der Vorteil dieser Notation ist, dass Abschätzungsketten aufgeschrieben werden können, z.B. $\log(x) \ll \sqrt{x} \ll e^x$. Mit dem O-Symbol wird das missverständlich und sollte vermieden werden, da dieses nicht "rückwärts" gelesen wird. Die O-Terme sollten für Fehlerterme in Asymptotiken vorbehalten sein.

- Leider kennen/benutzen nicht alle Mathematiker die äußerst nützliche Vinogradov-Notation und verwenden das Symbol $\gg$ z.B. in $x \gg 1$ als "x ist viel größer als 1". Es heißt aber "x ist größer als eine geeignete Konstante". Darauf muss man oft hinweisen. So ist z.B. für $f(x) = 2+\frac{1}{x}$ also $f \gg 1$ richtig, obwohl $2+\frac{1}{x}$ gar nicht so viel größer als 1 ist.
  Die Aussage $f \gg 1$ heißt vielmehr, dass $f(x)$ für große x der 0 fernbleibt.

Manchmal kommt es auf eine genaue Fehlertermabschätzung gar nicht an bzw., es ist nur bekannt, dass der F.T. von kleinerer Größenordnung ist als der H.T., dann will man nur die asymptotische Funktion nennen, also so etwas wie $f \approx g$ schreiben. Dafür gibt es diese Notation:

3.16. **Def.:** Wir schreiben $f \sim g$ bzw. $f(x) \sim g(x)$ für $x \to \infty$,
wenn $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ gilt.

Sprechweise: f ist asymptotisch (gleich) zu g
bzw. f ist von gleicher Größenordnung wie g.

3.17. **Bem.:** $f \sim g$ ist äquivalent zu $f(x) = g(x) + o(g(x))$.

$\ulcorner$ „$\Rightarrow$": $\quad \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} - 1 \xrightarrow{x \to \infty} 1 - 1 = 0$,

„$\Leftarrow$": $\quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x) + (f(x) - g(x))}{g(x)} = 1 + \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \to \infty} 1 + 0 = 1$. $\lrcorner$

3.18. **Beispiele zur Benutzung der Symbole:** 0.) $3x = O(x)$, $5\frac{\sqrt{x}}{\log x} = o(\sqrt{x})$

1.) $\log(x) = O_\varepsilon(x^\varepsilon)$ für jedes $\varepsilon > 0$, wobei die O-Konstante C von ε abhängt.

2.) x ist nicht $= O(\log(x))$, kurz: $x \neq O(\log(x))$.

3.) $\sin(x) = O(1)$, aber $\neq o(1)$.
Die Aussage $f(x) = O(1)$ besagt nicht, dass f konstant ist, sondern nur, dass f beschränkt ist.

4.) Bei konkurrierenden O-Termen reicht es, den größten zu behalten: $O(x) + O(x^2) + O(e^x) = O(e^x)$

5.) Aus $f(x) = o(x)$ folgt $f(x) = O(x)$.
Die Umkehrung gilt i.a. nicht.

6.) $\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} ;\ n \leq x\}$ heißt Gaußklammer von x. Es gilt $\lfloor x \rfloor = x + O(1)$, aber nicht $\lfloor x \rfloor = x + o(1)$.

7.) $\sqrt{x^2+1} = x + O(\frac{1}{x})$ für $x \to \infty$, $\quad \frac{1}{\log(x)} = O(\frac{1}{x-1})$ für $x \to \infty$,

8.) $\sqrt{x^2+1} \sim x$ für $x \to \infty$, $\quad \frac{1}{x-10} \sim \frac{1}{x}$ für $x \to \infty$, $\quad \exp(2\sqrt{\log(x)}) = O(x)$.

9.) $\tau(\lfloor x \rfloor) = O(x^\varepsilon)$ für jedes $\varepsilon > 0$, aber $\tau(\lfloor x \rfloor) \neq o(\log(x))$, da $\tau(2^k) = k + 1 > k = \frac{1}{\log(2)} \cdot \log(2^k)$.

3.19. Tipp: Für viele Größenordnungsabschätzungen (also o-Nachweise,...) kann die Regel von de l'Hôpital, vgl. Analysis, gute Dienste leisten, ein paar Beispiele:

- $e^{-x} = o(x)$ für $x \to \infty$, da $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{x} \underset{dlH}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{-e^{-x}}{1} = 0$.
- $\log(x) = o(\sqrt{x})$ für $x \to \infty$, da $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}} \overset{dlH}{=} \lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{1/x}{1/2\sqrt{x}}}_{=\frac{2}{\sqrt{x}}} = 0$.
- $\sin(x) \sim x$ für $x \to 0$, da $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \underset{dlH}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$.

Zu sorglos sollte die Regel allerdings nicht eingesetzt werden, vgl. [Heuser, Analysis I, S. 290, "eine Warnung von Otto Stolz"].

3.20. Asymptotiken für unstetige Funktionen: Das Beispiel $\tau(\lfloor x \rfloor) = O(x^{\varepsilon})$ zeigt, dass Abschätzungen für unstetige Funktionen, etwa aus zahlentheoretischen Fragestellungen, mit der Notation beschreibbar sind. Man schreibt hier auch $\tau(n) = O(n^{\varepsilon})$ für $n \in \mathbb{N}$.

- Für eine Treppenfunktion, die durch eine Summe entsteht, z.B. $f(x) = \sum_{n\le x} \frac{1}{n}$, ist die Approximation $f(x) \sim \log(x)$ durch die stetige Fkt. log eine starke und schöne Aussage. Genauer ist die Formel $f(x) = \log(x) + O(1)$, s. 3.23.

Nun zu einem wichtigen Werkzeug, nicht nur in der analytischen ZT:

3.21. Satz (partielle Summation, abgekürzt mit "part. Σ" oder "pΣ", gelegentlich abelsche Summation genannt):

Sei $(a_n)_{n\ge c}$ eine komplexe Folge. Sei $A(x) := \sum_{c\le n\le x} a_n$.

(1) Diskrete Version: Seien $f_{c+1}, f_{c+2}, \ldots \in \mathbb{C}$ und $c \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:
$$\sum_{c+1\le n\le x} a_n f_n = A(x) f_{\lfloor x \rfloor} - a_c f_{c+1} - \sum_{c+1\le n\le x-1} A(n)\cdot(f_{n+1} - f_n).$$

(2) Kontinuierliche Version: Sei $f: \mathbb{R}_{\ge c} \to \mathbb{C}$ stetig diff'bar, c reell.
Dann gilt: $\sum_{c\le n\le x} a_n f(n) = A(x) f(x) - \int_c^x A(t) f'(t)\, dt$.

3.22. Bem.: Dieses Werkzeug ist sehr nützlich, wenn man eine asymptotische Formel für $\sum_{n\le x} a_n$ kennt und eine für $\sum_{n\le x} a_n f_n$ herleiten möchte.

3.23. Bsp.: Haben $\sum_{n\le x} 1 = \lfloor x \rfloor = x + O(1)$.

Dann ist $\sum_{n\le x} \frac{1}{n} = \sum_{n\le x} 1\cdot\frac{1}{n} \underset{(2)}{=} \left(\sum_{n\le x} 1\right)\cdot\frac{1}{x} + \int_1^x \left(\sum_{n\le t} 1\right)\cdot\frac{1}{t^2}\, dt = \frac{x+O(1)}{x} + \int_1^x \frac{t+O(1)}{t^2}\, dt$
$= 1 + O\left(\frac{1}{x}\right) + \int_1^x \frac{1}{t}\, dt + O\left(\frac{1}{x}\right) + O(1) = \log(x) + O(1)$.

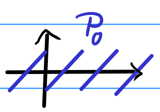
Bew.: (1): l.S. $= \sum_{c+1\le m\le x} (A(m)-A(m-1)) f_m = \sum_{c+1\le m\le \lfloor x\rfloor} A(m) f_m - \sum_{c\le m\le \lfloor x\rfloor -1} A(m) f_{m+1}$

$$= \underbrace{A(\lfloor x\rfloor)}_{=A(x)} f_{\lfloor x\rfloor} + \sum_{c+1\le m\le\lfloor x\rfloor-1} A(m)(f_m - f_{m+1}) - \underbrace{A(c)}_{=a_c} f_{c+1} = \text{r.S.}$$

(2): $\int_c^x A(t) f'(t)\,dt = \int_c^x \sum_{c\le m\le t} a_m f'(t)\,dt = \sum_{c\le m\le x} a_m \int_c^x \varepsilon_m(t) f'(t)\,dt$ $\left[\varepsilon_m(t) = \begin{cases} 1, & m\le t \\ 0, & \text{sonst}\end{cases}\right]$

$$= \sum_{c\le m\le x} a_m \int_m^x f'(t)\,dt = \sum_{c\le m\le x} a_m (f(x)-f(m)) = A(x)f(x) - \sum_{c\le m\le x} a_m f(m). \quad \square$$

Hin und wieder benötigt man die Umwandlung einer $\sum$ in ein $\int$ mit gewissem Fehler in explizitier Form. (Eine Riemannsumme kann z.B. durch das zugehörige $\int$ angenähert werden. Wie gut eine solche Approximation ist, will man abschätzen können.)

3.24 **Satz** (Eulersche Summenformel):
Seien $c<x$ reell, sei $f:[c,x]\to\mathbb{C}$ stetig und stückweise stetig diff'bar auf $[c,x]$.

Setze $P_0(x) := x - \lfloor x\rfloor - \frac12$. Dann ist

$$\sum_{c<m\le x} f(m) = \int_c^x f(t)\,dt + \underbrace{\int_c^x P_0(t) f'(t)\,dt - f(x)P_0(x) + f(c)P_0(c)}_{\text{explizitier Fehlerterm}}.$$

Beachte: $P_0(x) = O(1)$.

Bem.: • Die "Sägezahnkurve" P_0 wird gelegentlich auch mit $\psi(x)$ bezeichnet; hier nicht, weil ψ schon für die 2. Tschebyschev-Funktion reserviert ist, s. später in AnZ 11.
• Eine Verallgemeinerung/Verschärfung ist die (Euler-)MacLaurinsche Summenformel.

Bew.: $\sum_{c<m\le x} 1\cdot f(m) \overset{\text{part}\Sigma}{=} \lfloor x\rfloor f(x) - \underbrace{\lfloor c\rfloor f(c)}_{m=c \text{ wird berücksichtigt}} - \int_c^x \lfloor t\rfloor f'(t)\,dt = \lfloor x\rfloor f(x) - \lfloor c\rfloor f(c) - \int_c^x \overset{u'=1\leftarrow u}{t}\, \overset{v'\to v=f}{f'(t)}\,dt + \int_c^x (t-\lfloor t\rfloor) f'(t)\,dt$

$$\overset{\text{part}\int}{=} \lfloor x\rfloor f(x) - \lfloor c\rfloor f(c) - \left(x f(x) - c f(c) - \int_c^x f(t)\,dt\right) + \int_c^x (t-\lfloor t\rfloor) f'(t)\,dt$$

$$= \int_c^x f(t)\,dt + \int_c^x (t-\lfloor t\rfloor) f'(t)\,dt + (c-\lfloor c\rfloor) f(c) - (x-\lfloor x\rfloor) f(x)$$

$$= \int_c^x f(t)\,dt + \int_c^x \left(t-\lfloor t\rfloor-\tfrac12\right) f'(t)\,dt + \left(c-\lfloor c\rfloor-\tfrac12\right) f(c) - \left(x-\lfloor x\rfloor-\tfrac12\right) f(x).$$

$\hookrightarrow \int_c^x \frac12 f'(t)\,dt = \frac12 f(x) - \frac12 f(c)$ ✓

$\square$