# Vorlesung Analytische Zahlentheorie

SoSe'22, hhu
K. Halupczok

## AnZ 29: Verallgemeinerte Riemannsche Vermutung

Stichworte: Verallgemeinerte Riemannsche Vermutung (GRH), explizite Formel für $\psi(x,\chi)$, Restterm im PZS in APs unter (GRH), Vermutung von Montgomery, Deuring-Heilbronn-Abstoßungsphänomen

---

29.1. **Einleitung:** Analog zu $\zeta(s)$ kann auch für Dirichletsche L-Reihen $L(s,\chi)$ eine Verallgemeinerung der (RH) vermutet werden (GRH).
Zusammen mit der expliziten Formel für $\psi(x,\chi)$ kann unter Ann. der (GRH) ein sehr viel besserer Restterm im PZS in APs hergeleitet werden.
Die Ann., dass keine Siegelnullst. (mod $q$) existiert, ist schwächer als die (GRH).
Nimmt man deren Existenz an, so ist in diesem Fall die (GRH) falsch. Dann lässt sich ein "Abstoßungsphänomen" der Nullstellen beweisen, das als Deuring-Heibronn-Phänomen bekannt ist.

Analog zur Riemannschen Vermutung (RH) über die Lage der Nst. von $\zeta$ formulieren wir die:

29.2. Verallgemeinerte Riemannsche Vermutung (GRH): Alle Nullstellen $\varrho=\beta+i\gamma$ von $L(s,\chi)$ besitzen im kritischen Streifen $0<\sigma<1$ den Realteil $\beta=\frac{1}{2}$.
(Für welche $\chi$ mod $q$ bzw. $q\in\mathbb{N}$ dies gelten soll, muss im einzelnen präzisiert werden.)

Es genügt OE, diese Vermutung nur für primitive Charaktere mod $q$ auszusprechen.
Wie für $\psi(x)$ lässt sich analog auch für $\psi(x,\chi)$ eine explizite Formel herleiten, in denen die nichttrivialen Nullstellen von $L(s,\chi)$ vorkommen.

29.3. **Satz** (explizite Formel für $\psi(x,\chi)$): Sei $c>0$ klein. Sei $\chi$ Charakter mod $q$, $\chi\neq\chi_0$.
Sei $\eta(\chi)=1$ falls $\chi$ reell und $L(s,\chi)$ eine Nst. $\beta>1-\frac{c}{\log(q)}$ hat, sonst $\eta(\chi)=0$. Dann:

$$\psi(x,\chi)=\underbrace{-\eta(\chi)\frac{x^{\beta}}{\beta}}_{\text{Extraterm für die Siegelnullstelle }\beta\,!}-\sum_{\substack{\varrho\neq\beta,1-\beta\\|\operatorname{Im}\varrho|<T}}\frac{x^{\varrho}}{\varrho}+O\left(\frac{x}{T}\log^2(qx)+x^{1/4}\right),\quad \text{für alle } 2\leq T\leq x.$$

⌜ohne Beweis⌟

Mit 29.3 können auch wieder (analog zu Satz 22.12) äquivalente Aussagen zur (GRH) mit den Zählfunktion von PZen in APs gezeigt werden:

29.4. Satz: a) Es gilt: (GRH) $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \forall q, (a,q)=1: \psi(x;q,a) = \frac{x}{\varphi(q)} + O(x^{1/2+\varepsilon})$.

b) Es gilt: (GRH) $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \forall q, (a,q)=1: \vartheta(x;q,a) = \frac{x}{\varphi(q)} + O(x^{1/2+\varepsilon})$.

⌈in der Richtung "$\Rightarrow$" kann der Fehlerterm zu $O(x^{1/2}\log^2(x))$ verbessert werden.⌋

c) (GRH) $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \forall q, (a,q)=1: \pi(x;q,a) = \frac{li(x)}{\varphi(q)} + O(x^{1/2+\varepsilon})$.

⌈in der Richtung "$\Rightarrow$" kann der Fehlerterm zu $O(x^{1/2}\log(x))$ verbessert werden.⌋

29.5. Bem.: • In diesem Satz soll die (GRH) für alle $L(s,\chi)$, $\chi$ mod $q$, gelten.
• Die $O$-Konstanten sind unabhängig von $a$ und $q$.

Es ist möglich, die Konsequenzen der (GRH) für $\psi(x,\chi)$ zu präzisieren:

29.6. Satz: (GRH) für alle $L$-Funktionen mod $q$

$$\Rightarrow \psi(x,\chi) = \delta(\chi=\chi_0)\,x + O(x^{1/2}\log(x)\log(qx)),$$

und $\pi(x,\chi) = \delta(\chi=\chi_0)\,li(x) + O(x^{1/2}\log(x)\log(qx))$, wo $\delta(\chi=\chi_0) = \begin{cases} 1, & \chi=\chi_0, \\ 0, & \text{sonst}. \end{cases}$

Man kann hier auch Vermutungen plausibel machen, die über die (GRH) hinausgehen:

29.7. Vermutung von Montgomery: $(a,q)=1,\ q \le x,\ \varepsilon>0 \Rightarrow \psi(x;q,a) = \frac{x}{\varphi(q)} + O_\varepsilon\left(\frac{x^{1/2+\varepsilon}}{q^{1/2}}\right)$.

Von einem Beweis all dieser Vermutungen sind wir weit entfernt. Die Primzahlsätze in APs mit derart gutem (konditionellen) Fehlerterm sind wichtig für verschiedene Anwendungen, z.B. für bestimmte Algorithmen der Informatik. Dort ist es oft plausibel, die (GRH) anzunehmen, um etwa Laufzeitabschätzungen herleiten zu können, die näher an der Wirklichkeit sind als unkonditionell betrachtet.

Es gibt noch weiter eine große Auswahl an Äquivalenzen/Konsequenzen der (GRH). Einige sind sehr unmittelbar, bei anderen nur schwer erkennlich, dass ein Zusammenhang mit PZen in APs und der (GRH) besteht.

Die Annahme der Existenz von Siegelnullstellen geht insbesondere davon aus, dass die (GRH) falsch ist. Dies konnte bislang nicht zu einem Widerspruch geführt werden. Unter dieser Annahme ist folgendes "Abstoßungs"-Phänomen von Nullstelle nahe der Siegelnullstelle mod $q$ bemerkenswert:

29.8. **Deuring-Heilbronn-Phänomen**: Es habe $L(s,\chi^*)$ die Siegelnullst. $\beta^*$, $\chi^*$ sei primitiv mod $q^*$. Sei $A^{-1} = (1-\beta^*)\log(qq^*t)$ für $q \in \mathbb{N}$, $t > 0$. Dann ex. $C, c > 0$: $A \geq C \Rightarrow \forall \chi \bmod q$, $\chi$ primitiv: $L(s,\chi) \neq 0$ für $\sigma > 1 - \frac{c\log(A)}{\log(qq^*t)}$, außer für $\beta^*$ und $\chi$ (von $\chi^*$ erzeugt).

Dies vergrößert das nullstellenfreie Gebiet (mit Ausnahme von $\beta^*$) um den Faktor $\log(A) = \log\frac{1}{(1-\beta^*)\log(qq^*t)}$.

Falls also $\beta^*$ existiert, sind alle anderen Nullstellen (aller L-Reihen mod $q$ betrachtet) noch weiter von $\sigma = 1$ entfernt als man sonst weiß (d.h. die anderen Nullstellen erfahren eine "Abstoßung" von $\sigma = 1$ bzw. $\beta^*$).