AnZ 28

Vorlesung Analytische Zahlentheorie

SoSe'22, hhu
K. Halupczok

AnZ 28: Primzahlen in Progressionen

Stichworte: PZS in APs mit Restterm o.A.u.V., Abhängigkeit des Restterms von q, Siegelnullstelle, Satz von Siegel, Satz von Siegel-Walfisz

28.1. Einleitung: Der Restterm im PZS in APs hängt zunächst von q ab. Will man diese Abhängigkeit ausdrücken, müssen nullstellenfreie Gebiete von $L(s,\chi)$ nahe $s=1+it$ quantitativ bestimmt werden. Im Falle eines reellen Charakters kann nicht ausgeschlossen werden, dass nahe 1 eine reelle Nst. existiert, die sogenannte Siegelnullstelle. Deren mögliche Existenz verhindert, dass der PZS in APs o.A.u.V. stärker formuliert werden kann.

28.2. Motivation: Wir erhielten in 26.7 den PZS in Progressionen in der Form:

$$\Psi(x;q,a) = \frac{x}{\varphi(q)}\left(1+o_q(1)\right), \text{ glm. für alle } a \text{ mit } (a,q)=1, \text{ und}$$

eine partielle Σ lieferte daraus wiederum die Version

$$\pi(x;q,a) = \frac{li(x)}{\varphi(q)}\left(1+o_q(1)\right), \text{ glm. für alle } a \text{ mit } (a,q)=1.$$

Demnach sind die PZen auf den Restklassen $a \bmod q$, $(a,q)=1$, gleichverteilt: Pro Restklasse beträgt ihr (asymptotischer) Anteil $\frac{1}{\varphi(q)}$.

28.3. Bsp.: Für $q=10$: $25\% = \frac{1}{4} = \frac{1}{\varphi(10)}$ aller PZen haben die Endziffer 1 $\lfloor$bzw. $3, 7$ oder $9\rfloor$.

Mit etwas mehr Arbeit kann auch eine Version mit explizitem Restterm gezeigt werden, z.B.:

28.4. PZS in arithmetischen Progressionen (mit Restglied): Für $q\in\mathbb{N}$ und $x\to\infty$ gilt:

$$\Psi(x;q,a) = \frac{x}{\varphi(q)} + O_q\left(\frac{x}{\exp(c_0\sqrt{\log x})}\right), \text{ alle } a \text{ mit } (a,q)=1,$$

$$\pi(x;q,a) = \frac{li(x)}{\varphi(q)} + \quad \text{"} \quad \text{"} \quad , \text{ ein } c_0=c_0(q)>0,$$

(d.h. der PZS mit Restterm $O(x\exp(-c\sqrt{\log(x)}))$, vgl. AnZ12, überträgt sich auf APs.)

28.5. Bem.: Dies geht auch mit dem Vinogradov-Korobov-Fehlerterm, vgl. AnZ12, der beste bekannte Restterm im PZS in APs ist daher $O_q\left(x\exp(-C\log^{3/5}(x)\,\log\log^{-1/5}(x))\right)$, d.h. o.A.u.V.

28.6. Motivation: Diese Formulierungen des PZSes in APs haben alle den Mangel, dass der Fehlerterm (implizit in o_q bzw. O_q) noch von q abhängig ist!
In manchen Anwendungen des PZSes in Progressionen (z.B. Goldbachproblem) ist aber die explizite Abhängigkeit des Fehlerterms von q wesentlich.
Oft kommt es auf die Gleichmäßigkeit des Satzes in einem weiten q-Bereich an. Ohne Ann. unbewiesener Vermutungen (unkonditionell) fällt der q-Bereich aber sehr klein aus, s. Satz von Siegel-Walfisz 28.14 unten.

Was weiß man über die Abhängigkeit des Restterms von q?
Zunächst ist praktisch, die Tschebyschev-Fkt. ψ mit Charakteren $\chi \bmod q$ zu gewichten:

28.7. Def.: Sei χ ein Charakter mod q, $x \geq 1$. Setze $\psi(x,\chi) := \sum_{n \leq x} \Lambda(n)\chi(n)$.

28.8. Bem.: Satz 25.7 zeigt, dass $\psi(x;q,a) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi(q)} \bar{\chi}(a)\psi(x,\chi)$.

Das Studium der $\psi(x,\chi)$ kann wieder direkt auf das Studium der Nullstellen der Fkt. $L(s,\chi)$ zurückgeführt werden. Wie schon im Beweis von $L(1,\chi) \neq 0$ gesehen, ergeben sich Probleme/neue Phänomene bei $L(s,\chi)$ zu reellen χ (OE primitiv wegen 25.4)
(wo $\chi^2 = \chi_0$ gilt).
Zunächst der Fall eines nichtreellen χ:

28.9. Satz: Sei $c>0$ klein. Dann gilt für alle Nst. ϱ von $L(s,\chi)$ zu einem primitiven Charakter χ mod q mit $\chi^2 \neq \chi_0$ die Absch. $\operatorname{Re}(\varrho) < 1 - \frac{c}{\log(q(|\operatorname{Im}\varrho|+2))}$.

Bem.: Die Bed. "primitiv" kann hier gestrichen werden.

Bew.: Sei χ mod q primitiv und nichtreell ($\chi^2 \neq \chi_0$).
In der Ungleichung $0 \leq \operatorname{Re}\left(-3\frac{L'}{L}(\sigma,\chi_0) - 4\frac{L'}{L}(\sigma+it,\chi) - \frac{L'}{L}(\sigma+2it,\chi^2)\right)$ (0)
laut Beweis von 27.5 schätzen wir die Terme nach oben ab.

- Für $\sigma > 1$ ist $-\frac{L'}{L}(\sigma,\chi_0) = \sum_{n \geq 1} \Lambda(n) n^{-\sigma} \leq -\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma)$,
  also $-\frac{L'}{L}(\sigma,\chi_0) \leq \frac{1}{\sigma-1} + A$ (1)
  für $A>0$ hinr. groß.

- Laut der expliziten Formel für $\frac{L'}{L}(s)$, vgl. mit der expl. Formel 22.9 für ψ, gilt $\frac{L'}{L}(s,\chi) = \sum_{\substack{\varrho \in \mathcal{N}(\chi) \\ |\mathrm{Im}(s-\varrho)|<1}} \frac{1}{s-\varrho} + O(\log(q(2+|t|)))$ in $-\frac{1}{2} \le \sigma \le 2, |t| \ge 1$, wenn $\chi(-1) \neq 1$, sonst in $|s| > \frac{1}{2}$ mit Extra-Summanden $\frac{1}{s}$.

  [Ohne Beweis, s. etwa [Brüdern Satz 2.6.2].]

Sei χ mod q primitiv und nichtreell ($\chi^2 \neq \chi_0$), dann folgt damit, dass

$$\circledast \quad -\mathrm{Re}\frac{L'}{L}(s,\chi) < A\mathcal{L} - \sum_{\substack{\varrho \in \mathcal{N}(\chi) \\ |\mathrm{Im}(s-\varrho)|<1}} \mathrm{Re}\frac{1}{s-\varrho},$$

mit A hinr. groß und $\mathcal{L} := \log(q(2+|t|))$.

Ist $\sigma > 1$, gilt $\mathrm{Re}\frac{1}{s-\varrho} > 0$, sodass hier beliebig viele Summanden in der Σ weggelassen werden können. Sei $\varrho \in \mathcal{N}(\chi)$, setze $s := \sigma + i \cdot \mathrm{Im}(\varrho)$ und erhalte für $\sigma > 1$, dass

$$-\mathrm{Re}\frac{L'}{L}(\sigma + i\,\mathrm{Im}(\varrho), \chi) < A\mathcal{L} - \frac{1}{\sigma - \mathrm{Re}(\varrho)}. \quad (2)$$

- Falls χ^2 primitiv, kann $\circledast$ auch für $\frac{L'}{L}(\sigma, \chi^2)$ betrachtet werden, lassen hierfür die komplette Σ weg: $-\mathrm{Re}\frac{L'}{L}(\sigma + 2i\,\mathrm{Im}(\varrho), \chi^2) < A\mathcal{L}$. $\quad (3)$
- Falls χ^2 nicht primitiv, und laut Vor. nicht der Hauptchar. χ_0, so werde χ^2 von χ_1 mod q_1 induziert, und sehen so für $\sigma > 1$ durch Vergleich der zugehörigen Eulerprodukte (vgl. 25.4), dass

$$\left|\frac{L'}{L}(s,\chi^2) - \frac{L'}{L}(s,\chi_1)\right| \le \sum_{p \mid q} \left|\frac{p^{-s}\log(p)}{1-\chi_1(p)p^{-s}}\right| \le \sum_{p \mid q} \log(p) \le \log(q).$$

Anw. von (3) auf χ_1 zeigt, dass (3) auch für nicht-primitives χ^2 korrekt bleibt.

- Einsetzen der Absch. (1)-(3) in die erste Unglg. (0) zeigt $\frac{4}{\sigma - \mathrm{Re}(\varrho)} < \frac{3}{\sigma - 1} + 8A\mathcal{L}$ für $\sigma > 1$. Jetzt betr. speziell $\sigma := 1 + \delta\mathcal{L}^{-1}$ mit einem $\delta > 0$, dann folgt $4(\sigma - 1) < 3(\sigma - \mathrm{Re}(\varrho)) + 8A\mathcal{L}(\sigma-1)(\sigma - \mathrm{Re}(\varrho))$

$$\Leftrightarrow 4\delta\mathcal{L}^{-1} < 3(1 + \delta\mathcal{L}^{-1} - \mathrm{Re}(\varrho)) + 8A\delta(1 + \delta\mathcal{L}^{-1} - \mathrm{Re}\,\varrho)$$

$$\Leftrightarrow 4\delta\mathcal{L}^{-1} < 3(1 - \mathrm{Re}(\varrho)) + 3\delta\mathcal{L}^{-1} + 8A\delta^2\mathcal{L}^{-1} + 8A\delta(1 - \mathrm{Re}\,\varrho)$$

$$\Leftrightarrow 4\delta\mathcal{L}^{-1} < (3 + 8A\delta)(1 - \mathrm{Re}(\varrho)) + (3 + 8A\delta)\delta\mathcal{L}^{-1}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \mathrm{Re}(\varrho) > \delta\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{3+8A\delta} - 1\right),$$

erhalte also mit $c := \frac{4}{8A\delta + 3} - 1 \underset{\uparrow}{>} \frac{1}{5}$ für $\delta > 0$ hinr. klein die Beh.

$$\left[\frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{4} > \frac{1}{5}\right]$$

$\square$

28.10. __Satz:__ (a) Die Beh. von Satz 28.9. gilt auch für reelle primitive Charaktere, falls $|\mathrm{Im}(\varrho)| > \frac{\delta}{\log q}$ verlangt wird.

(b) $\exists c>0 : \forall\, 0<\delta\le c\ \forall$ reellen primitiven Charaktere χ:
$L(s,\chi)$ hat höchstens eine Nst. in $|\mathrm{Im}(s)| \le \frac{\delta}{\log q}$, $\mathrm{Re}(s) > 1-\frac{\delta}{\log q}$.
Falls sie existiert, dann ist sie notwendig reell und einfach.

28.11. __Bem.:__ • Die Bed. "primitiv" kann auch hier gestrichen werden.

• Die fragliche Nst. nur für höchstens ein χ mod q auftreten. ⌜o. Bew.⌟

• Es kann nicht ausgeschlossen werden, dass eine solche reelle Nst. β von $L(s,\chi)$ existiert! Für sie gilt $\beta > 1-\frac{\delta}{\log q}$, sie würde also recht nahe bei 1 liegen, falls es sie denn gäbe. Man nennt eine solche Ausnahmenullstelle auch eine Siegelnullstelle, bzw. auch Siegel-Landau-Nullstelle.

__Bew.__ (von 28.10): Sei nun χ mod q reell, also $\chi^2=\chi_0$, so dass laut (0) folgt:

$$-3\frac{L'}{L}(\sigma,\chi_0) - 4\,\mathrm{Re}\frac{L'}{L}(\sigma+it,\chi) - \mathrm{Re}\frac{L'}{L}(\sigma+2it,\chi_0) \ge 0 \quad \text{für } \sigma>1. \qquad (0')$$

Müssen im vorigen Bew. nur (3) ersetzen.
Der Vergleich von $\frac{L'}{L}(s,\chi_0)$ mit $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ ergibt $\left|\frac{L'}{L}(s,\chi_0) - \frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right| \le \sum_{p|q}\left|\frac{\log(p)p^{-s}}{1-p^{-s}}\right| \le \log q$,
und mit $-\mathrm{Re}\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+it) < \mathrm{Re}\frac{1}{\sigma+it-1} + A\log(|t|+2)$
erhalten wir $-\mathrm{Re}\frac{L'}{L}(\sigma+2it,\chi_0) < \mathrm{Re}\frac{1}{\sigma-1+2it} + A\mathcal{L}$, $\mathcal{L} := \log(q(|t|+2))$.

Einsetzen der Absch. in die erste Ungleichung (0') liefert mit $\sigma>1$, $t=\mathrm{Im}(\varrho)$, $s=\sigma+it$, dass

$$\frac{4}{\sigma-\mathrm{Re}(\varrho)} < \frac{3}{\sigma-1} + \underbrace{\mathrm{Re}\frac{1}{\sigma-1+2it}}_{\text{extra}} + 8A\mathcal{L}. \qquad (3')$$

Wähle $\sigma := 1+\delta\mathcal{L}^{-1}$.

• Falls $|t| > \delta\mathcal{L}^{-1}$, gilt $\mathrm{Re}\frac{1}{\sigma-1+2it} = \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+4t^2} < \frac{\delta\mathcal{L}^{-1}}{(\delta\mathcal{L}^{-1})^2+4(\delta\mathcal{L}^{-1})^2} = \frac{1}{5}\frac{\mathcal{L}}{\delta}$,
so dass (3') ersetzt werden kann durch $\frac{4}{\sigma-\mathrm{Re}(\varrho)} < \frac{3}{\sigma-1} + \frac{1}{5}\mathcal{L}\delta^{-1} + 8A\delta$

$$\Leftrightarrow\ 4(\sigma-1) < 3(\sigma-\mathrm{Re}(\varrho)) + (\sigma-1)(\sigma-\mathrm{Re}(\varrho))\left(\tfrac{1}{5}\mathcal{L}\delta^{-1}+8A\delta\right)$$

$$\Leftrightarrow\ 4\delta\mathcal{L}^{-1} < 3(1+\delta\mathcal{L}^{-1}-\mathrm{Re}(\varrho)) + \delta\mathcal{L}^{-1}(1+\delta\mathcal{L}^{-1}-\mathrm{Re}(\varrho))\cdot\left(\tfrac{1}{5}\mathcal{L}\delta^{-1}+8A\delta\right)$$

$$\Leftrightarrow\ \delta\mathcal{L}^{-1} < (1-\mathrm{Re}(\varrho))\cdot\left(3+\delta\mathcal{L}^{-1}\cdot\left(\tfrac{1}{5}\mathcal{L}\delta^{-1}+8A\delta\right)\right) + \ldots = (1-\mathrm{Re}(\varrho))\cdot\left(\tfrac{16}{5}+8A\delta^2\mathcal{L}^{-1}\right) + \delta^2\mathcal{L}^{-2}\left(\tfrac{1}{5}\mathcal{L}\delta^{-1}+8A\delta\right)$$

$$\Leftrightarrow\ 1-\mathrm{Re}(\varrho) > \frac{\delta\mathcal{L}^{-1}-\delta^2\mathcal{L}^{-2}\left(\frac{1}{5}\mathcal{L}\delta^{-1}+8A\delta\right)}{16/5+8A\delta^2\mathcal{L}^{-1}} = \frac{1-\frac{1}{5}+8A\delta^2\mathcal{L}^{-1}}{16/5+8A\delta^2\mathcal{L}^{-1}}\cdot\delta\mathcal{L}^{-1}$$

$$\Leftrightarrow\ 1-\mathrm{Re}(\varrho) > \frac{4-40A\delta^2\mathcal{L}^{-1}}{16+40A\delta^2\mathcal{L}^{-1}}\cdot\frac{\delta}{\mathcal{L}} =: c\cdot\frac{\delta}{\mathcal{L}} \quad \text{mit } c>\tfrac{1}{5} \text{ für hinr. kl. } \delta>0.$$

Die Verschärfung von $|t| > \delta\mathcal{L}^{-1}$ zu $|t| > \frac{\delta}{\log(q)}$ zeigt die Beh. (a).

AnZ 28

- Bleibt der Fall $|t| \le \frac{\delta}{\log(q)}$, d.h. zeigen (b):

Mit $s=\sigma>1$ folgt aus ⊛, dass $-\frac{L'}{L}(\sigma,\chi) < A\log(q) - \sum_{\substack{\varrho\in N(\chi)\\ |\mathrm{Im}(\varrho)|<1}} \frac{1}{\sigma-\varrho}$, denn wegen $\varrho\in N(\chi)$ $\Rightarrow \bar\varrho\in N(\chi)$ ist die Summe reell.

Sei $\varrho=\beta+i\gamma\in N(\chi)$. Ist $\gamma>0$, kann der Summand mit dem für $\gamma<0$ zusammengefasst werden zu $\frac{1}{\sigma-\beta-i\gamma}+\frac{1}{\sigma-\beta+i\gamma} = \frac{2(\sigma-\beta)}{(\sigma-\beta)^2+\gamma^2} > 0$.

Existiert eine Nst. ϱ mit $\gamma>0$, so folgt also

$$-\frac{L'}{L}(\sigma,\chi) < A\log(q) - \frac{2(\sigma-\beta)}{(\sigma-\beta)^2+\gamma^2}$$ durch Weglassen weiterer Summanden der Σ.
(ohne Faktor 2 bei einfacher, reeller Nst.)

Weiter gilt die m. Y.

$$-\frac{L'}{L}(\sigma,\chi) = \sum_{n\ge1}\Lambda(n)\chi(n)n^{-\sigma} \ge -\sum_{n\ge1}\Lambda(n)n^{-\sigma} = \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) > -\frac{1}{\sigma-1} - A.$$

Beide Ungl. ergeben zusammen $-\frac{1}{\sigma-1} - A < A\log(q) - \frac{2(\sigma-\beta)}{(\sigma-\beta)^2+\gamma^2}$, also

$$-\frac{1}{\sigma-1} < 2A\log(q) - \frac{2(\sigma-\beta)}{(\sigma-\beta)^2+\gamma^2}. \quad (+)$$ (Für $\gamma=0$ ohne Faktor 2 im letzten Bruch)

- Sei nun $0<\delta<1$ und $0<\gamma<\frac{\delta}{\log(q)}$. Wir setzen $\sigma := 1+\frac{2\delta}{\log(q)}$, und es folgt $\gamma \le \frac{1}{2}(\sigma-1) \le \frac{1}{2}(\sigma-\beta)$, also ist mit $\frac{2(\sigma-\beta)}{(\sigma-\beta)^2+\gamma^2} \ge \frac{2(\sigma-\beta)}{(\sigma-\beta)^2+\frac{1}{4}(\sigma-\beta)^2} = \frac{8}{5(\sigma-\beta)}$ dann

$$-\frac{1}{\sigma-1} < 2A\log(q) - \frac{8}{5(\sigma-\beta)}.$$

Einsetzen von $\sigma-1=\frac{2\delta}{\log(q)}$ zeigt $-\frac{\log(q)}{2\delta} < 2A\log(q) - \frac{8}{5(1+\frac{2\delta}{\log(q)}-\beta)}$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{5}\cdot\frac{1}{1+\frac{2\delta}{\log(q)}-\beta} < \left(2A+\frac{1}{2\delta}\right)\log(q)$$

$$\Leftrightarrow 1-\beta+\frac{2\delta}{\log(q)} > \frac{8}{5}\cdot\frac{1}{(2A+\frac{1}{2\delta})\log q} = \frac{8}{5}\cdot\frac{2\delta}{(4A\delta+1)\log(q)} > \frac{15}{5}\cdot\frac{\delta}{\log q} = \frac{3\delta}{\log(q)},$$
(Faktor wäre $=1$, wenn $\gamma=0$)

also $\beta < 1-\frac{\delta}{\log(q)}$ für $\delta>0$ hinr. klein, falls $\gamma>0$ wäre.

In dem Bereich $|\mathrm{Im}(s)| \le \frac{\delta}{\log q}$, $\mathrm{Re}(s) > 1-\frac{\delta}{\log q}$ laut (b) können also nur Nullstellen mit $\gamma=0$ vorkommen, d.h. es kommen nur noch reelle β in Frage.

- Sind nun $\beta_1,\beta_2\in\mathbb{R}$ Nst. mit $\beta_1\le\beta_2$ (falls $\beta_1=\beta_2$ wäre die Nst. doppelt), so zeigt obiges Ergebnis (+), dass $-\frac{1}{\sigma-1} < 2A\log(q) - \left(\frac{1}{\sigma-\beta_1}+\frac{1}{\sigma-\beta_2}\right)$

Setze wieder $\sigma-1=\frac{2\delta}{\log(q)}$; die Ann. $\beta_2 \ge 1-\frac{\delta}{\log(q)}$ ergibt

$\frac{1}{\sigma-\beta_2} \ge \frac{1}{1+\frac{2\delta}{\log q}-1+\frac{\delta}{\log q}} = \frac{\log(q)}{3\delta}$, erhalten $-\frac{\log(q)}{2\delta} < 2A\log(q) - \frac{\log(q)}{3\delta} - \frac{1}{1+\frac{2\delta}{\log q}-\beta_1}$,

also $\frac{1}{1-\beta_1+\frac{2\delta}{\log q}} < \log(q)\cdot\left(2A+\frac{1}{6\delta}\right) = \log(q)\cdot\frac{12A\delta+1}{6\delta}$, also $1-\beta_1+\frac{2\delta}{\log(q)} > \underbrace{\frac{6\delta}{12A\delta+1}}_{>3\delta \text{ für } \delta \text{ klein}}\cdot\frac{1}{\log(q)}$,

also $\beta_1 < 1-\frac{\delta}{\log(q)}$. Also kann es höchstens eine (einfache) reelle Nst. $\beta > 1-\frac{\delta}{\log(q)}$ geben. □

28.12. **Bem.:** • Gelegentlich gehen manche Sätze von der unbewiesenen Vermutung aus, dass es keine Siegelnullstellen gibt oder gibt (schwächer als (GRH))
⌈z.B. [Heath-Brown, 1983]: Ex. Siegelnullst. ⇒ Ex. von unendl. vielen PZ Zwillingen $p, p+2$.⌋
⌈[Granville/Stark, 2000]: abc-Vermutung in Zahlkörpern ⇒ $L(s,\chi)$ mit fest. χ hat <u>keine</u> Siegelnullst.⌋
• Solange nichts über die Existenz einer Siegelnullstelle gesagt werden kann, muss man, um unkonditionelle Sätze (die o.A.u.V. gelten) herzuleiten, <u>buchstäblich mit ihr rechnen.</u> Z.B. in der expliziten Formel für $\psi(x,\chi)$, s. <u>AnZ 29</u>.

Die Siegel-Nst. muss zum Aufstellen eines PZSes in APs nach oben abgeschätzt werden.
Die Aussage $L(1,\chi) \neq 0$ wird dann mit einer unteren Schranke für $L(1,\chi)$ quantitativ gemacht:

28.13. <u>**Satz von Siegel**</u>: • Sei $\chi \neq \chi_0$ ein <u>reeller Charakter</u> mod q und $\varepsilon > 0$.
Es existiert ein $\tilde{C}(\varepsilon) > 0$, so dass $L(1,\chi) > \tilde{C}(\varepsilon) \cdot q^{-\varepsilon}$.
Dabei hängt $\tilde{C}(\varepsilon)$ in <u>nicht angebbarer</u> Weise von ε ab.
• Dies impliziert: Ist $\beta \in \mathbb{R}$ Nst. von $L(s,\chi)$ zu χ mod q (reell), dann gilt $\beta < 1 - \tilde{C}_0(\varepsilon) q^{-\varepsilon}$.
⌈o. Bew.⌋

28.14. <u>**Bem.:**</u> • Aus keinem bekannten Beweis kann eine <u>effektive</u> Abhängigkeit der Konstanten $\tilde{C}(\varepsilon)$, $\tilde{C}_0(\varepsilon)$ von ε (etwa in der Form $\tilde{C}(\varepsilon) \leq 100\,\varepsilon^{-5}$) entnommen werden. ⌈Die einzig bekannte effektive Version lautet <u>$L(1,\chi) \geq C q^{-1/2}$</u>, <u>$C$ angebbar.</u>⌋
Jeder Satz, der im Beweis den Satz von Siegel verwendet, hat diesen Makel!
• Aus dem Satz von Siegel <u>28.13</u> lässt sich ein PZS in Progressionen herleiten, der für gewisse q-Bereiche gleichmäßig ist:

28.15. <u>**Satz von Siegel–Walfisz**</u>: Zu jedem $A > 0$ ex. $C = C(A) > 0$, so dass für $x \geq 2$, für $\boxed{q \leq \log^A(x)}$ und $(a,q) = 1$ gilt:
$$\psi(x;q,a) = \frac{x}{\varphi(q)} + O_A\left(\frac{x}{\exp(c(A)\sqrt{\log(x)})}\right), \text{ bzw. } \pi(x;q,a) = \frac{li(x)}{\varphi(q)} + O_A\left(\frac{x}{\exp(c(A)\sqrt{\log(x)})}\right).$$

28.16. <u>**Bem.:**</u> Der Bereich $q \leq \log^A(x)$ fällt leider nur sehr klein aus. Die Konstante $A > 0$ kann zwar bel. groß gewählt werden, aber die O_A-Konstante hängt in bislang nicht effektiv angebbarer Weise von A ab (wegen der Verwendung des Satzes von Siegel <u>28.12</u>).