Vorlesung Analytische Zahlentheorie

SoSe'22, hhu
K. Halupczok

AnZ 27: Dirichletscher Primzahlsatz

Stichworte: Satz von Dirichlet, Dirichlet-Dichte $\delta_{\mathbb{P}}(P_{a,q}) = \frac{1}{\varphi(q)}$, natürliche Dichte $d_{\mathbb{P}}(P_{a,q})$, $L(1+it,\chi) \neq 0$, PZS in APs für $\psi(x;q,a)$ mit Newmanschem Taubersatz, Versionen mit $\vartheta(x;q,a)$ und $\pi(x;q,a)$

27.1. **Einleitung:** Der Dirichletsche Primzahlsatz kann bereits durch Nachweis von $\delta_{\mathbb{P}}(P_{a,q}) = \frac{1}{\varphi(q)}$ bewiesen werden. Dafür reicht die Aussage $L(1,\chi) \neq 0$. Zum Beweis des PZSes in APs, d.h. $\psi(x;q,a) \sim \frac{x}{\varphi(q)}$ bzw. $d_{\mathbb{P}}(P_{a,q}) = 1$, wird mehr benötigt, nämlich $L(1+it,\chi) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Der Newmansche Taubersatz 14.13 ist dann nur noch das richtige analytische Werkzeug.

Ziel ist es zunächst, den Satz von Dirichlet zu beweisen.

27.2. **Satz (von Dirichlet):** Sei $q \in \mathbb{N}$ und $\operatorname{ggT}(a,q) = 1$. Dann enthält die AP $a \bmod q$ unendlich viele Primzahlen, d.h. $\#\{p \equiv a\,(q);\ p \in \mathbb{P}\} = \infty$. (Insbesondere existiert stets mindestens eine PZ $p \equiv a\,(q)$.)

Bew.: Haben $\sum_{n \equiv a(q)} \Lambda(n) n^{-\sigma} = \sum_{p \equiv a(q)} \log(p) \cdot p^{-\sigma} + O(1)$ für $\sigma \to 1+$, $\boxtimes$

denn
$$0 \leq \sum_{p \equiv a(q)} \log(p) \sum_{k \geq 2} p^{-k\sigma} \underset{\sigma > 1}{\leq} \sum_p \log(p)\, p^{-2} \cdot \frac{1}{1-p^{-1}} = \sum_p \frac{\log(p)}{p(p-1)} = O(1).$$

Aus Kor. 26.8 folgt somit, dass auch $\lim_{\sigma \to 1+} \overbrace{(\sigma-1)}^{\to 0} \cdot \sum_{p \equiv a(q)} \log(p) \cdot p^{-\sigma} = \frac{1}{\varphi(q)}$.
Also divergiert die Reihe für $\sigma \to 1$,

und das geht nur, wenn $\#\{p \in \mathbb{P};\ p \equiv a(q)\} = \infty$. $\square$

27.3. **Kor.:** Die Menge $P_{a,q} := \{p \equiv a\,(q);\ p \text{ prim}\}$ hat die Dirichlet-Dichte $\delta_{\mathbb{P}}(P_{a,q}) = \frac{1}{\varphi(q)}$.

Bew.: Kor. 25.10 lautete $\sum_{n \equiv a(q)} \Lambda(n) n^{-s} = -\frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi(q)} \overline{\chi}(a) \frac{L'}{L}(s,\chi)$, und wegen $\boxtimes$ in 27.2 folgt $\sum_{p \equiv a(q)} \log(p) p^{-\sigma} = -\frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi(q)} \overline{\chi}(a) \frac{L'}{L}(\sigma,\chi) + O(1)$. Nun ist $\frac{L'}{L}$ die logarithmische Ableitung von L, d.h. $(\log(L))' = \frac{L'}{L}$, so dass die Integration nach $s = \sigma > 1$ zeigt:
$$\sum_{p \equiv a(q)} p^{-\sigma} = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi(q)} \overline{\chi}(a) \log(L(\sigma,\chi)) + O(\sigma-1),$$
denn die Fkt. $O(1)$ aus $\boxtimes$ ist integrierbar auf $[1,\sigma]$, und durch eine absolute Konstante beschränkt.

Wir unterscheiden in dieser Summe $\chi = \chi_0$ und $\chi \neq \chi_0$:
Nach der Eulerproduktdarstellung der L-Funktionen aus Satz 25.4 gilt:
Für $\chi = \chi_0$ ist $L(s,\chi_0) = \zeta(s) P_q(s)$, also $\log L(s,\chi_0) = \log \zeta(s) + \log P_q(s)$ mit dem Produkt $P_q(s) := \prod_{p \mid q} (1-p^{-s})$.
Für $\chi \neq \chi_0$ ist $L(s,\chi) = P_q(\chi,s)$, also $\log L(s,\chi) = \log P_q(\chi, s)$
mit dem Produkt $P_q(\chi,s) := \prod_{p \nmid q} (1-\chi(p)p^{-s})^{-1}$,
es folgt $$\sum_{p \equiv a(q)} p^{-\sigma} = \frac{1}{\varphi(q)} \underbrace{\chi_0(a)}_{=1} \cdot \left(\log \zeta(\sigma) + \log P_q(\sigma)\right) + \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \bar{\chi}(a) \log P_q(\chi,\sigma) + \mathcal{O}(\sigma - 1). \quad \oplus$$

Laut Satz 23.9 ist $$\delta_{\mathbb{P}}(P_{a,q}) = \lim_{\sigma \to 1+} \left(\log\left(\tfrac{1}{\sigma-1}\right)\right)^{-1} \sum_{p \equiv a(q)} p^{-\sigma} = \lim_{\sigma \to 1+} \frac{1}{\log \zeta(\sigma)} \sum_{p \equiv a(q)} p^{-\sigma}$$

$$= \lim_{\sigma \to 1+} \frac{1}{\varphi(q)} \Big(1 + \underbrace{\frac{\log P_q(\sigma)}{\log \zeta(\sigma)}}_{\xrightarrow[\sigma\to1+]{} 0}\Big) + \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \bar{\chi}(a) \underbrace{\frac{\log P_q(\chi,\sigma)}{\log \zeta(\sigma)}}_{\xrightarrow[\sigma\to1+]{} 0} + \underbrace{\frac{\mathcal{O}(\sigma-1)}{\log \zeta(\sigma)}}_{\xrightarrow[\sigma\to1+]{} 0,} = \frac{1}{\varphi(q)},$$

da $\log \zeta(\sigma) \sim -\log(\sigma-1)$, und $\frac{x}{\log x} \xrightarrow{x\to0+} 0$. [del'H: $\lim_{x\to0} \frac{x}{\log x} = \lim_{x\to0} \frac{1}{\frac{1}{x}} = 0$]

denn die Produkte $P_q(s)$, $P_q(\chi,s)$ sind holomorph in $s=\sigma>1$, deren Logarithmen bleiben für $\sigma \to 1+$ beschränkt.

□

27.4. **Bem.:** Die Reihe $\sum_{p\equiv a(q)} \frac{1}{p}$ ist divergent nach $\oplus$, da $\zeta(\sigma)$ für $\sigma \to 1+$ divergiert.
Die Voraussetzung des Dichte-Satzes 23.4 ist demnach erfüllt. Wenn man jetzt noch zusätzlich wüsste, dass auch die natürliche Dichte $d_{\mathbb{P}}(P_{a,q})$ existiert, d.h. der entsprechende Grenzwert $\lim_{x\to\infty} \frac{P_{a,q}(x)}{\pi(x)} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{PZS}\\ \text{für } \pi(x)}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{P_{a,q}(x)}{li(x)}$ existiert, würde damit schon $d_{\mathbb{P}}(P_{a,q}) = \delta_{\mathbb{P}}(P_{a,q}) = \frac{1}{\varphi(q)}$ folgen.
Aber dieser Weg ist nicht leichter, als gleich den PZS in APs "direkt" zu zeigen.

Wir zeigen deswegen nach direkt, dass $\frac{\Psi(x;q,a)}{x} \sim \frac{1}{\varphi(q)}$, der PZS für APs in der Ψ-Version, gilt (die anderen Versionen sind daraus leicht herzuleiten, s.u. Kor. 26.8).
Dazu verwenden wir wieder den Newmanschen Tauber-Satz 14.13.
wie beim Beweis des gewöhnlichen PZSes in 15.2 und gehen den dortigen Weg genau analog nach.
Darauf kommt es an, dass $\sum_{n\equiv a(q)} \Lambda(n) n^{-s} - \frac{1}{\varphi(q)} \cdot \left(\frac{\zeta'}{\zeta}(s) - \zeta(s)\right)$ in $\sigma \geq 1$ holomorph fortgesetzt werden kann, also in allen Punkten $1+it$, $t\in\mathbb{R}$, und dafür ist das Nichtverschwinden von $L(1+it,\chi)$ erforderlich. Die holomorphe Fortsetzbarkeit trifft zu, da allein der Hauptcharakter χ_0 einen Pol-Beitrag bei $s=1$ liefert, wie schon im Beweis zu 27.3 zu sehen war.

Die Methode von de la Vallée-Poussin zum Nachweis von $\zeta(1+it)\neq 0$ bei $t\in\mathbb{R}$ ist übertragbar auf $L(s,\chi)$ wie folgt, nämlich bis auf den Fall $\chi\neq\chi_0$, χ reell, $t=0$.

27.5. **Satz:** Sei $q\in\mathbb{N}$ und χ ein Charakter mod q, $\chi\neq\chi_0$. Für alle $t\in\mathbb{R}$ ist $L(1+it,\chi)\neq 0$, es sei denn, χ ist reell und $t=0$. (Dieser Fall folgt aber mit 26.7.)

Bew.: • Für $\sigma>1$ sieht man wie im Beweis von 13.2:

$$\mathrm{Re}\left(3\frac{L'}{L}(\sigma,\chi_0)+4\frac{L'}{L}(\sigma+it,\chi)+\frac{L'}{L}(\sigma+2it,\chi^2)\right)$$

$$=-\sum_{n,(n,q)=1} n^{-\sigma}\Lambda(n)\,\mathrm{Re}\left(3+4\chi(n)n^{-it}+\chi^2(n)n^{-2it}\right) \qquad \chi^2(n)=e^{2i\arg(\chi(n))}$$

$$=-\sum_{n,(n,q)=1} n^{-\sigma}\Lambda(n)\underbrace{\left(3+4\cos(\varphi_n)+\cos(2\varphi_n)\right)}_{\geq 0} \quad \text{mit } \varphi_n:=\arg(\chi(n))-t\log(n),$$

was ≤ 0 ist.

• Falls $t\neq 0$ argumentieren wir wie früher in 13.2. 3.)/4.):
Es habe $L(s,\chi)$ bei $1+it$ eine m-fache Nullstelle, wo $m\in\mathbb{N}_0$,
und $L(s,\chi^2)$ bei $1+2it$ eine μ-fache Nullstelle, wo $\mu\in\mathbb{Z}$ (d.h. $\mu<0$, falls Pol).
Dann verhält sich für $\sigma\to 1+$ der Ausdruck

$$3\frac{L'}{L}(\sigma,\chi_0)+4\frac{L'}{L}(\sigma+it,\chi)+\frac{L'}{L}(\sigma+2it,\chi^2) \qquad \otimes$$

wie $-\frac{3}{\sigma-1}+\frac{4m}{\sigma-1}+\frac{\mu}{\sigma-1}+$ Beschränktes,

was im Fall $m\geq 1,\mu\geq 0$ positiv wäre für σ nahe 1, im $\lightning$ zu obigem.

• Im Fall $t=0$, $\chi\neq\chi_0$, χ nicht reell (d.h. $\chi^2\neq\chi_0$) ist $L(s,\chi^2)$ bei $s=1$ holomorph, d.h. $L(1,\chi^2)$ ex. und kann höchstens eine μ-fache Nullstelle haben, also $\mu\geq 0$.
Hier kann wie im vorigen Fall argumentiert werden. $\square$

27.6. **Bem.:** Im Fall $t=0$, $\chi\neq\chi_0$, χ reell (d.h. $\chi^2=\chi_0$) hat $L(s,\chi^2)$ bei $s=1$ einen Pol (den von ζ der Vielfachheit 1, d.h. $\mu=-1$). Der Ausdruck $\otimes$ wird hier beschrieben durch

$$-\frac{3}{\sigma-1}+\frac{4m}{\sigma-1}-\frac{1}{\sigma-1}+\text{Beschränktes},$$

so dass man nur noch daraus schließen kann, dass $m\leq 1$, d.h. dass $L(s,\chi)$ bei $s=1$ keine mehrfache Nullstelle hat. Der Ausschluss der einfachen Nst. bei $s=1$ in diesem Fall erfordert einen anderen Beweis, etwa den in 26.7 schon erbrachten.

Nun der Beweis des PZSes in APs, im Detail.

27.7. Satz (PZS in Arithmetischen Progressionen, ψ-Version): Sei $q \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{Z}$ mit $(a,q)=1$.
Dann ist $\psi(x;q,a) \sim \frac{x}{\varphi(q)}$, d.h. $\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x;q,a)}{x} = \frac{1}{\varphi(q)}$.

Bew.: Wir betrachten die Glg. $\sum_{n\equiv a(q)} \Lambda(n) n^{-s} = s \int_0^\infty \psi(u;q,a) u^{-s-1} du$, die sich wie in 15.2 aus partieller Summation ergibt.

Die Substitution $t = \log(u)$ macht das $\int$ zu $\int_0^\infty \psi(e^t;q,a) e^{-ts} dt$, der Laplace-Transformierten von $f(t) = \psi(e^t;q,a) = O(e^t)$.

Wir möchten den Newmanschen Taubersatz 14.13 anwenden.
[Der besagte, dass wenn $F(z) := \int_0^\infty f(t) e^{-zt} dt$ in $\{\sigma = 0\}$ holomorph fortsetzbar ist, folgt: $\int_0^\infty f(t)\,dt = F(0)$.]

Wegen Kor. 25.10 ist $\sum_{n\equiv a(q)} \Lambda(n) n^{-s} = -\frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi(q)} \overline{\chi}(a) \frac{L'}{L}(s,\chi)$,

mit $z := s-1$ folgt $-\frac{1}{z+1} \cdot \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi(q)} \overline{\chi}(a) \frac{L'}{L}(z+1,\chi) = \int_0^\infty \frac{\psi(e^t;q,a)}{e^t} \cdot e^{-tz} dt$ für $\mathrm{Re}(z) > 0$.

Der Pol-Beitrag, den die l.S. bei χ_0, also von $\frac{\zeta'}{\zeta}(z+1)$ bei $z=0$ bekommt, ist wesentlich.
Betrachten wir diesen separat, d.h. $-\frac{1}{z+1} \cdot \frac{1}{\varphi(q)} \underbrace{\overline{\chi}_0(a)}_{=1} \frac{\zeta'}{\zeta}(z+1) - \frac{1}{z+1} \cdot \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \overline{\chi}(a) \frac{L'}{L}(z+1,\chi)$.

Somit kann im Hinblick auf den Newmanschen Taubersatz 14.13 geschrieben werden:

$$F(z) := \frac{1}{z+1} \cdot \frac{1}{\varphi(q)} \cdot \Big(\underbrace{-\frac{\zeta'}{\zeta}(z+1) - \zeta(z+1)}_{\substack{\text{hol. fortsbar in} \\ \mathrm{Re}(z)=0,\text{ da Pol bei } z=0 \\ \text{so weggehoben wird}}} \underbrace{- \sum_{\chi \neq \chi_0} \overline{\chi}(a) \frac{L'}{L}(z+1,\chi)}_{\substack{\text{hol. fortsbar in } \mathrm{Re}\,z=0 \\ \text{wegen } L(1+it,\chi)\neq 0 \text{ für alle } t}} \Big) = \int_0^\infty \underbrace{\Big(\frac{\psi(e^t;q,a)}{e^t} - \frac{\lfloor e^t \rfloor}{\varphi(q) e^t} \Big)}_{=: f(t) \text{ für } 14.13} \cdot e^{-tz} dt$$

Die Vor. von 14.13 sind erfüllt, es folgt damit, dass $\int_0^\infty \Big(\frac{\psi(e^t;q,a)}{e^t} - \frac{\lfloor e^t \rfloor}{\varphi(q) e^t} \Big) dt$ konvergiert.
Durch Ersetzen von $\lfloor e^t \rfloor$ mit $e^t - \{e^t\}$ folgt, dass $\int_0^\infty \Big(\frac{\psi(e^t;q,a)}{e^t} - \frac{1}{\varphi(q)} \Big) dt$ konvergiert.

Daraus folgt genau wie in AnZ 15, S. -3-, analog, dass $\psi(e^t;q,a) e^{-t} \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{1}{\varphi(q)}$ gilt
(die benötigte Monotonie von $\psi(e^t;q,a)$ gilt auch hier).

Mit $x = e^t$ ist dies der PZS in APs, in der Form $\psi(x;q,a) \sim \frac{x}{\varphi(q)}$ für $x \to \infty$.

$\square$

Zum PZS in APs äquivalente Formulierungen sind nun:

27.8 <u>Kor.:</u> Sei $q \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{Z}$ mit $(a,q)=1$ (fest). Dann: $\vartheta(x;q,a) \sim \frac{x}{\varphi(q)}$, und
$\pi(x;q,a) \sim \frac{x}{\varphi(q)\log(x)} \sim \frac{li(x)}{\varphi(q)}$.

<u>Bew.:</u> • Wegen $\Psi(x;q,a) - \vartheta(x;q,a) \leq \sum_{k \geq 2} \sum_{p^k \leq x} \log(p) \overset{11.13}{=} \mathcal{O}(\sqrt{x}\log(x))$ folgt die ϑ-Version aus der Ψ-Version, (und umgekehrt).

• Eine partielle Summation zeigt

$$\pi(x;q,a) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv a (q)}} \frac{\log(p)}{\log(p)} \overset{\ulcorner f(t) = \frac{1}{\log(t)} \lrcorner}{=} \frac{\vartheta(x;q,a)}{\log(x)} + \underbrace{\int_{3/2}^{x} \frac{\vartheta(t;q,a)}{t \log^2(t)} dt}_{\ll \frac{x}{\log^2(x)} = o_q\left(\frac{x}{\log(x)}\right)},$$

also folgt aus der ϑ-Version die π-Version $\pi(x;q,a) \sim \frac{x}{\varphi(q)\log(x)}$.

⌜q, a werden als Konstanten betrachtet; die impliziten Konstanten der Restterme hängen davon ab.⌟

□