Vorlesung Analytische Zahlentheorie

SoSe'22, hhu
K. Halupczok

AnZ 26: $L(1,\chi)\neq 0$

Stichworte: Vielfachheiten der Nullstelle $s=1$ von $L(s,\chi)$ in $\sum_{n\equiv a(q)}\Lambda(n)n^{-s}$, $L(1,\chi)\neq 0$ für komplexe und reelle Charaktere $\chi\neq\chi_0$, Dirichlet-Dichte der PZpotenzen $p^e\equiv a\ (q)$.

26.1. **Einleitung:** Nach Satz 25.4 existiert für $\chi\neq\chi_0$ der Wert $L(1,\chi)\in\mathbb{C}$. Es wird entscheidend sein, dass dieser Wert $\neq 0$ ist. Dies zeigen wir hier. Zunächst sind für die $\chi\neq\chi_0$ die Vielfachheiten $m_\chi\geq 0$ der Nullstelle 1 bei $L(\sigma,\chi)$ unmittelbar im Ausdruck $\sum_{n\equiv a(q)}\Lambda(n)n^{-\sigma}$ nahe $\sigma=1$ enthalten.

26.2. **Satz:** Sei $q\in\mathbb{N}$, χ ein Charakter mod q und $m_\chi\in\mathbb{N}_0$ die Vielfachheit der Nullstelle 1 von $L(\sigma,\chi)$, sei $(a,q)=1$.
Dann: $\lim\limits_{\sigma\to 1+}(\sigma-1)\sum\limits_{n\equiv a(q)}\Lambda(n)n^{-\sigma}=\frac{1}{\varphi(q)}\Big(1-\sum\limits_{\chi\neq\chi_0}\bar\chi(a)\cdot m_\chi\Big)$.

26.3. **Bem.:** Der Fall $m_\chi=0$ bedeutet $L(1,\chi)\neq 0$. Sind alle $m_\chi=0$, ist die r.S. $=\frac{1}{\varphi(q)}$, was wir zeigen möchten. Denn:
Die linke Seite ist die Dirichlet-Dichte der Primzahlpotenzen $p^e\equiv a(q)$ aus 23.9; von der Gewichtung mit $\log(p)$, von $\Lambda(n)$ herrührend, abgesehen.

Bew. (von 26.2): Wir verwenden, dass $L(s,\chi)$ für $\chi\neq\chi_0$ und $L(s,\chi_0)-\frac{\mathrm{Res}_1 L(s,\chi_0)}{\sigma-1}$ Taylorentwicklungen in $\sigma_0=1$ haben (dies folgt aus der Holomorphie der Fktn. laut 25.4).
Da $L(\sigma,\chi)\neq 0$ für $\sigma>1$, folgt $\frac{L'}{L}(\sigma,\chi)=O(1)$ für $\sigma\to 1+$.
Betr. für $\sigma>1$ nun Kor. 25.10, danach ist $\sum_{n\equiv a(q)}\Lambda(n)n^{-s}=-\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi(q)}\bar\chi(a)\cdot\frac{L'}{L}(s,\chi)$. ⊛
Es habe $L(\sigma,\chi)$ eine Nst. der Vielf. m_χ in $\sigma=1$. Haben dann die Taylorentwicklungen
$L(\sigma,\chi)=c_{m_\chi}(\sigma-1)^{m_\chi}+c_{m_\chi+1}(\sigma-1)^{m_\chi+1}+\ldots$ und
$L'(\sigma,\chi)=m_\chi c_{m_\chi}(\sigma-1)^{m_\chi-1}+\ldots$ um $\sigma_0=1$ mit $c_{m_\chi}\neq 0$.
Also: $\lim\limits_{\sigma\to 1+}(\sigma-1)\cdot\frac{L'}{L}(\sigma,\chi)=m_\chi$. Weiter ist: $\lim\limits_{\sigma\to 1+}(\sigma-1)\cdot\frac{L'}{L}(\sigma,\chi_0)=-1$.
Einsetzen dieser Grenzwerte in ⊛ (mit $\sigma-1$ malgenommen) zeigt die Beh. $\square$

Jetzt wird die Unterscheidung zwischen reellen und nichtreellen Charakteren relevant:

26.4. **Def.:** Der Charakter χ mod q heißt reell, falls $\chi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$,
andernfalls komplex.

26.5. **Satz:** (a) Für höchstens ein χ mod q, $\chi \neq \chi_0$, ist $L(1,\chi) = 0$.
(b) Für komplexes χ ist $L(1,\chi) \neq 0$.

Bew.: (a): Folgt aus 26.2: Betrachte darin $a = 1$, so dass $\bar{\chi}(a) = 1$.
Da $\lim_{\sigma \to 1+} (\sigma - 1) \sum_{n \equiv 1 (q)} \Lambda(n) n^{-\sigma} \geq 0$, ist auch die r. S. ≥ 0, also $\frac{1}{\varphi(q)} \left(1 - \sum_{\chi \neq \chi_0} m_\chi\right) \geq 0$.
Dann ist nur höchstens ein $m_\chi \geq 1$.

(b): Aus $L(1,\chi) = 0$ folgt $L(1,\bar{\chi}) = 0$, denn $L(1,\bar{\chi}) = \overline{L(1,\chi)}$. Für komplexe χ ist $\chi \neq \bar{\chi}$,
und (b) folgt aus (a): Wäre $m_\chi \geq 1$ für komplexes χ, müsste auch $m_{\bar{\chi}} \geq 1$ gelten
im Widerspruch zu (a). $\square$

Bleibt zu zeigen, dass $m_\chi = 0$ bzw. $L(1,\chi) \neq 0$ auch für reelle $\chi \neq \chi_0$ richtig ist.
Dies gelingt in Satz 26.7. Der folgende Satz bereitet dies vor:

26.6. **Satz:** Sei $\chi \neq \chi_0$ reell. Dann ist $\left| L(1,\chi) - \sum_{n \leq x} \chi(n) n^{-1} \right| = O_q(x^{-1})$,
und $\left| L(\tfrac{1}{2},\chi) - \sum_{n \leq x} \chi(n) n^{-1/2} \right| = O_q(x^{-1/2})$.

Bew.: Für $\sigma > 0$ zeigt partielle Summation: $\left| L(\sigma,\chi) - \sum_{n \leq x} \chi(n) n^{-\sigma} \right| = \left| \sum_{n > x} \chi(n) n^{-\sigma} \right|$
$= \sigma \cdot \int_x^\infty \underbrace{\Big(\sum_{x < n \leq t} \chi(n) \Big)}_{\ll_q 1} t^{-\sigma - 1} dt = O_q(x^{-\sigma})$. $\square$

26.7. **Satz:** Für $\chi \neq \chi_0$ reell ist $L(1,\chi) \neq 0$.

Bew.: Sei $F(n) := \sum_{d \mid n} \chi(d) = \chi * \mathbb{1}\,(n)$, ist multiplikativ.
Für die Werte von F auf Primpotenzen gilt: $F(p^\nu) = \sum_{0 \leq \mu \leq \nu} \chi(p^\mu) = \begin{cases} 1, & p \mid q, \\ \nu + 1, & \chi(p) = 1, \\ 0, & \chi(p) = -1,\ 2 \nmid \nu, \\ 1, & \chi(p) = -1,\ 2 \mid \nu. \end{cases}$
Haben also $F(p^\nu) \geq 0$ und $F(p^{2\nu}) \geq 1$,
also ist $F(n) \geq 0$ und $F(n^2) \geq 1$.

Setze $G(x) := \sum_{n \leq x} F(n) n^{-1/2}$.

- Es folgt $G(x) \geq \sum_{m \leq \sqrt{x}} F(m^2) m^{-1} \geq \sum_{m \leq \sqrt{x}} m^{-1} \geq \frac{1}{2} \log(x)$, d.h. wir haben $G(x)$ gut nach unten abgeschätzt durch die Werte, die die Summanden auf Quadraten annehmen.

• Andererseits ist

$$G(x) = \sum_{n\le x} n^{-1/2} \sum_{d\mid n} \chi(d) = \sum_{d\le x}\chi(d) \sum_{\substack{n\le x\\ d\mid n}} n^{-1/2}$$

→ Subst.: $dt = n$, unterscheide $d\le\sqrt{x}$ und $d>\sqrt{x}$

$$= \sum_{d\le\sqrt x}\chi(d)\, d^{-1/2}\sum_{t\le x/d} t^{-1/2} + \sum_{t\le\sqrt x} t^{-1/2}\sum_{\sqrt x<d\le x/t}\chi(d)\,d^{-1/2}. \qquad \oplus$$

Nach der Eulerschen Summenformel 3.24 ist für $\sigma>0$:

$$\sum_{n\le y} n^{-\sigma} = \int_1^y t^{-\sigma}\,dt - \sigma\underbrace{\int_1^y P_0(u)\,u^{-\sigma-1}\,du}_{=\int_1^\infty \ldots + O_\sigma(y^{-\sigma})} - y^{-\sigma}\underbrace{P_0(y)}_{O(1)} + \underbrace{P_0(1)}_{O(1)},$$

$\lceil c = 1-\varepsilon,\ \varepsilon\to 0 \rfloor$

wo $P_0(x) := x - \lfloor x\rfloor - \frac12$.

Mit $C_\sigma>0$ passend folgt $\quad \sum_{n\le y} n^{-\sigma} = (1-\sigma)^{-1}y^{-\sigma+1} + C_\sigma + O_\sigma(y^{-\sigma})$.

Also ist, wenn diese Formel im Fall $\sigma=\frac12$ in $\oplus$ eingesetzt wird,

$$G(x) = \sum_{d\le\sqrt x}\chi(d)\,d^{-1/2}\cdot\left(2(x/d)^{1/2} + C_{1/2} + O\left((d/x)^{1/2}\right)\right) + \sum_{t\le\sqrt x} t^{-\frac12}\left(O\left(\left(\tfrac{x}{t}\right)^{-\frac12}\right) + O(x^{-1/4})\right)$$

denn: $\sum_{\sqrt x<d\le \frac{x}{t}}\chi(d)\,d^{-1/2}$

$= \sum_{d\le \frac{x}{t}}\chi(d)\,d^{-1/2} - \sum_{d\le\sqrt x}\chi(d)\,d^{-1/2}$

$= L(\tfrac12,\chi) + O\left(\left(\tfrac{x}{t}\right)^{-1/2}\right) - L(\tfrac12,\chi) + O(x^{-\frac14})$ nach 26.6

$= O\left(\left(\tfrac{x}{t}\right)^{-\frac12}\right) + O(x^{-\frac14})$

$$= 2x^{1/2}\underbrace{\sum_{d\le\sqrt x}\chi(d)\,d^{-1}}_{=L(1,\chi)+O(x^{-1/2})\text{ nach 26.6.}} + C_{1/2}\underbrace{\sum_{d\le\sqrt x}\chi(d)\,d^{-1/2}}_{=L(\frac12,\chi)+O(x^{-1/4})} + O(1) \text{ nach 26.6.}$$

$$+ O\left(\sum_{t\le\sqrt x} t^{-1/2}\cdot\frac{t^{1/2}}{\sqrt x}\right) + O\Big(\underbrace{\sum_{t\le\sqrt x} t^{-1/2}}_{\ll(\sqrt x)^{\frac12}}\cdot x^{-1/4}\Big)$$

$$= 2x^{\frac12}L(1,\chi) + O(1).$$

Aus $L(1,\chi)=0$ würde daraus $G(x)=O(1)$ folgen, im ↯ zu $G(x) > \frac12\log(x)$. □

26.8. Bem.: • Alternativer Schluss: Die Reihe $\sum_{n\ge1}\frac{F(n)}{n^s}$ ist wegen $G(x)>\frac12\log(x)$ bei $s=\frac12$ divergent, ihre Kgz.abszisse ist also $\sigma_c\ge\frac12$. Nach dem Satz von Landau 7.2 hat diese Fkt. eine Singularität in $\sigma_c\ge\frac12$. Falls $L(1,\chi)=0$, wäre $\sum_{n\ge1}\frac{F(n)}{n^s} = \sum_{n\ge1}\frac{\chi * \mathbb{1}(n)}{n^s} = L(s,\chi)\cdot\zeta(s)$ holomorph in $\sigma>0$, da $L(s,\chi)$ den Pol von $\zeta(s)$ bei $s=1$ wegheben würde. Das stellt einen ↯ zum Satz von Landau (anwendbar: $F(n)\ge0$) dar.

Es folgt die Behauptung zur Dirichlet-Dichte (bis auf den Faktor $\log(n)$):

26.9. Kor.: Sei $q\in\mathbb{N}$, $\mathrm{ggT}(a,q)=1$. Dann: $\lim_{\sigma\to1+}(\sigma-1)\cdot\sum_{n\equiv a(q)}\Lambda(n)\,n^{-\sigma} = \frac{1}{\varphi(q)}$.

Bew.: Die Sätze 26.5 und 26.7 implizieren $m_\chi=0$ für alle $\chi\ne\chi_0$. Dann zeigt Satz 26.2 dieses Korollar. □