Vorlesung Analytische Zahlentheorie

SoSe'22, hhu
K. Halupczok

AnZ 25: Dirichletsche L-Funktionen

Stichworte: (Dirichletsche) L-Reihe und L-Funktion, Eulerproduktdarstellung für $L(s,\chi)$, Summen über APs von zth. Fkt. mit Charakteren umschreiben, Zählfunktion $\Psi(x;q,a)$, Funktionalgleichung für L-Funktionen

---

25.1. **Einleitung:** Die Charaktere $\chi: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ erzeugen die Dirichletschen L-Reihen $L(s,\chi) = \sum_{n\geq 1} \frac{\chi(n)}{n^s}$.
Wir untersuchen ihre analytischen Eigenschaften, wo $L(s,\chi_0)$ zum Hauptcharakter $\chi_0 \bmod q$ eng mit $\zeta(s)$ verbunden ist. Für $\chi \neq \chi_0$ ist $L(s,\chi)$ holomorph in $\sigma > 0$, sonst in $\sigma > 1$.
Wir erhalten eine Eulerproduktdarstellung von $L(s,\chi)$ in $\sigma > 1$, welche dort Nullstellenfreiheit garantiert. Die Reihe $\sum_{\substack{n\geq 1\\ n\equiv a(q)}} \Lambda(n) n^{-s}$ lässt sich mit L-Funktionen ausdrücken, so dass analytische Methoden greifen.

25.2. **Def.:** Es sei $q \in \mathbb{N}$ und χ ein Charakter mod q. Unter der Dirichletschen L-Reihe $L(s,\chi)$ zu χ versteht man die von χ erzeugte Dirichletreihe $L(s,\chi) := \sum_{n\geq 1} \chi(n) n^{-s} = \sum_{n \geq 1} \frac{\chi(n)}{n^s}$, für $\sigma > 1$.

25.3. **Bem.:** • Für $q = 1$ ist $\chi_0 = \mathbb{1}$ der einzige Charakter, dann ist $L(s,\chi_0) = \zeta(s)$.
- Auch für $q > 1$ hängt $L(s,\chi_0)$ stark mit $\zeta(s)$ zusammen, wie Satz 25.4.2.) zeigt.
- Der Multiplikationssatz 5.7 für Dirichletreihen zeigt $L(s,\chi_1) \cdot L(s,\chi_2) = L(s, \chi_1 * \chi_2)$ (gültig im gemeinsamen absoluten Konvergenzbereich der L-Reihen) für alle $\chi_1 \bmod q_1$ und $\chi_2 \bmod q_2$.
- Über den Konvergenzbereich der Reihen gibt Satz 25.4.1.) Aufschluss. Die von den Reihen vermittelten Funktionen (auf der Konvergenzhalbebene und ihrem meromorphen Fortsetzungsbereich) heißen Dirichletsche L-Funktionen. Dirichletreihen, die von verallgemeinerten Charakteren erzeugt werden, werden auch L-Funktionen genannt. Hier sollen mit L-Funktionen ausschließlich Dirichletsche L-Funktionen gemeint sein.

25.4. **Satz:** Es sei $q \in \mathbb{N}$ und χ ein Charakter mod q.

1.) Dann ist $L(s,\chi)$ für $\sigma > 1$ kompakt konvergent, und für $\chi \neq \chi_0$ sogar für $\sigma > 0$. Somit stellt $L(s,\chi)$ für $\sigma > 1$ (bzw. für $\sigma > 0$ falls $\chi \neq \chi_0$) eine holomorphe Funktion dar.

2.) Für $\sigma > 1$ gilt die Eulerproduktdarstellung $L(s,\chi_0) = \zeta(s) \cdot \prod_{p \mid q} (1-p^{-s})$, mit der $L(s,\chi_0)$ zu einer in $\sigma > 0$ meromorphen Funktion fortgesetzt wird; mit einem einzigen einfachen Pol bei $s=1$.

3.) Für $\chi \neq \chi_0$ gilt für $\sigma > 1$ die Eulerproduktdarstellung $L(s,\chi) = \prod_{p \nmid q} (1-\chi(p)p^{-s})^{-1}$.

Bew.: Wir bemerken zunächst, dass $\sum_{n \leq x} \chi(n) \leq q$ für $\chi \neq \chi_0$ gilt für alle x, da über jede volle Periode $1,\dots,q-1$, dann $q,\dots,2q-1$, usw., nach den ONR aus AnZ 24 die Summe verschwindet, und so in $\sum_{n \leq x} \chi(n)$ maximal q Summanden (im Betrag ≤ 1) verbleiben. Für $x \to \infty$ ist die Summe also $\ll_q 1$. Falls $\chi = \chi_0$ gilt $\sum_{n \leq x} \chi(n) \ll x$.

zu 1.): Partielle Summation zeigt somit:

$$\sum_{n \geq 1} \chi(n) n^{-s} = \lim_{N \to \infty} \Big(N^{-s} \cdot \underbrace{\sum_{n \leq N} \chi(n)}_{\ll_q 1,\ \chi \neq \chi_0,\ \text{sonst} \ll N} + s \int_1^N \underbrace{\Big(\sum_{n \leq u} \chi(n)\Big)}_{\ll_q 1 \text{ für } \chi \neq \chi_0, \text{ sonst} \ll u} u^{-s-1}\, du \Big)$$

$$= s \int_1^\infty \Big(\sum_{n \leq u} \chi(n)\Big) u^{-s-1}\, du.$$

Kompakte kgz. für $\sigma > 0$, bei $\chi = \chi_0$ für $\sigma > 1$.

zu 2.): Haben $\chi_0(p) = \begin{cases} 0, & p \mid q, \\ 1, & p \nmid q, \end{cases}$ also gilt für $\sigma > 1$ nach dem Eulerproduktsatz 8.15(ii), da χ_0 vollständig multiplikativ, dass

$$L(s,\chi_0) = \prod_{p \nmid q} (1-p^{-s})^{-1} = \prod_p (1-p^{-s})^{-1} \prod_{p \mid q} (1-p^{-s}) = \zeta(s) \underbrace{\prod_{p \mid q} (1-p^{-s})}_{\text{holomorph für } \sigma > 1}.$$

Die Meromorphie auf $\sigma > 0$ folgt somit aus der für $\zeta(s)$.

zu 3.): Sei $\chi \neq \chi_0$. Für $\sigma > 1$ liefert der Eulerproduktsatz 8.15(ii) ($\sigma > 1$ für absolute Reihen-Konvergenz)

$$L(s,\chi) = \prod_{p \nmid q} \Big(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\Big)^{-1} = \prod_p (1-\chi(p)p^{-s})^{-1} \prod_{p \mid q} (1-\chi(p)p^{-s}).$$

$\square$

25.5. **Kor.:** Sei $q \in \mathbb{N}$. Für χ mod q hat $L(s,\chi)$ keine Nullstelle in $\sigma > 1$. ⌜Eulerfaktoren $\neq 0$, $\zeta \neq 0$⌟

25.6. **Bem.:** Für $q=1$ ist $L(s,\chi) = L(s,\mathbb{1}) = \zeta(s)$, das folgt auch aus 25.4.2.), da das leere Produkt mit der (unerfüllbaren) Bedingung $p \mid q = 1$ dann $= 1$ ist.

Wir zeigen nun den nützlichen Satz, mit dem eine Summe über eine arithmetische Progression $n \equiv a\,(q)$ in eine Summe mit Charakteren mod q umgewandelt wird.

25.7. **Satz**: Sei $q \in \mathbb{N}$. Für eine zth. Fkt. f und $(a,q)=1$ ist für $x \geq 1$:

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a(q)}} f(n) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi(q)} \overline{\chi(a)} \sum_{n \leq x} \chi(n) f(n).$$

In der Summe $\sum_{\chi(q)}$ durchläuft χ alle Charaktere mod q.

Dabei kann $\sum_{n \leq x}$ auch durch $\sum_{n=1}^{\infty}$ ersetzt werden, falls $\sum_n |f(n)|$ kgt.

Bew.: r.S. $= \sum_{n \leq x} f(n) \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi(q)} \overline{\chi}(a) \chi(n) \underset{\substack{\uparrow \\ \overline{\chi}(a) = \chi(a^{-1}) \\ \chi \text{ vollst. mult.}}}{=} \sum_{n \leq x} f(n) \cdot \underbrace{\frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi(q)} \chi(a^{-1}n)}$

ONR: $=1$ falls $a^{-1}n \equiv 1\,(q)$, $=0$ sonst

$$= \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a(q)}} f(n).$$ □

25.8. **Def.** (Zählfunktionen für PZen in APs):
Sei $q \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{Z}$ mit $(a,q)=1$. Zu den PZen $p \equiv a\,(q)$ definieren wir

$$\pi(x;q,a) := \#\{p \leq x;\ p \in \mathbb{P},\ p \equiv a\,(q)\},$$

und die Tschebyschev-Funktionen für PZen in APs,

$$\psi(x;q,a) := \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a(q)}} \Lambda(n) \quad \text{und} \quad \vartheta(x;q,a) := \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv a(q)}} \log(p).$$

25.9. **Bem.**: Speziell die Zählfunktion $\psi(x;q,a)$ erlaubt uns einen analytischen Zugang wie folgt: Die Koeffizientenfolge der Dirichletreihe $\sum_{n \equiv a(q)} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$ hat die Zählfunktion $\psi(x;q,a)$ als summatorische Funktion. Und diese Dirichletreihe kann nun via den Charakteren mod q in Summen mit L-Funktionen umgeschrieben und analytisch behandelt werden:

25.10. **Kor.**: Es sei $q \in \mathbb{N}$, $(a,q)=1$, $\sigma > 1$. Dann ist

$$\sum_{n \equiv a(q)} \Lambda(n) n^{-s} = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi(q)} \overline{\chi(a)} \underbrace{\sum_{n \geq 1} \chi(n) \Lambda(n) n^{-s}}_{= -\frac{L'}{L}(s,\chi)} = \frac{-1}{\varphi(q)} \sum_{\chi(q)} \overline{\chi}(a) \cdot \frac{L'}{L}(s,\chi).$$ □

Bew.: Die 1. Gl. folgt aus 25.7 mit $f(n) = \Lambda(n) n^{-s}$, denn $\sum_{n \geq 1} |f(n)|$ kgt. für $\sigma > 1$.
Wie die Formel $\sum_{n \geq 1} \Lambda(n) n^{-s} = -\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ aus 5.10 kann genauso $\sum_{n \geq 1} \chi(n) \Lambda(n) n^{-s} = -\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}$ hergeleitet werden: Mit 5.2 folgt $L'(s,\chi) = -\sum_{n \geq 1} \chi(n) \log(n) n^{-s}$, und mit $\Lambda * \mathbb{1} = \log$ folgt, da χ vollständig multiplikativ, dass
$\chi\Lambda * \chi = \chi\log$, dies zeigt $\left(\sum_{n \geq 1} \chi(n)\Lambda(n) n^{-s}\right) \cdot \overbrace{\left(\sum_{n \geq 1} \chi(n) n^{-s}\right)}^{= L(s,\chi)} = \sum_{n \geq 1} \chi(n) \log(n) n^{-s} = -L'(s,\chi)$, für $\sigma > 1$. □

25.11. **Bem.:** Analog zu ζ zeigt die Formel in 25.10, dass die Nullstellen der L-Funktionen in direkten Zusammenhang mit der Zählfkt. $\Psi(x;q,a)$ für PZ(potenz)en in APs stehen. Durch die Gewichtung und Summation mit Charakteren wird es aber komplizierter als mit ζ bzw. $\Psi(x)$.

25.12. **Bem.:** Auch für L-Funktionen kann eine Funktionalglg. wie für ζ hergeleitet werden. Sie lautet für $q>1$:

$$\Lambda(s,\chi) = \varepsilon(\chi)\cdot\Lambda(1-s,\bar{\chi}),$$

mit der vollständigen L-Funktion

$$\Lambda(s,\chi) := \left(\frac{q}{\pi}\right)^{s/2}\Gamma\left(\frac{s+\kappa}{2}\right)L(s,\chi),$$

$$\kappa := \frac{1}{2}(1-\chi(-1)), \quad \varepsilon(\chi) := i^{-\kappa}\cdot\frac{\tau(\chi)}{\sqrt{q}},$$

und der Gaußsumme $\tau(\chi) := \sum_{m(q)} \chi(m)\, e^{2\pi i m/q}$. [ohne Beweis.]

Allerdings gilt diese Funktionalglg. nur für primitive Charaktere mod q. Da aber jeder Charakter $\neq \chi_0$ mod q auf einen primitiven Charakter zurückgeführt werden kann, genügt das. (Ohne Details. Wir nennen einen Charakter χ mod q primitiv, falls er keine kleinere Periode >1 als q hat. Der Hauptcharakter wird nicht zu den primitiven Charakteren gezählt.) Mit dieser Funktionalgleichung wird $L(s,\chi)$ zu einer ganzen Fkt. fortgesetzt (d.h. holomorph auf $\mathbb{C}$), falls $q>1$, $\chi\neq\chi_0$.