Vorlesung Analytische Zahlentheorie

SoSe '22, hhu
K. Halupczok

AnZ 23: Dichten

Stichworte: natürliche Dichte, Dirichlet-Dichte, Dichte(n) der Primzahlen und der quadratfreien Zahlen, äquivalente Definitionen der Dirichlet-Dichten, Dirichletscher Primzahlsatz, Primzahlsatz in arithmetischen Progressionen

---

TEIL II: Primzahlen in Progressionen:

Kapitel AnZ 23 bis AnZ 29

23.1. Einleitung: • Im zweiten Teil der Vorlesung beantworten wir die Frage, wie man mit den Methoden des ersten Teils zu einer Verallgemeinerung des PZSes für Primzahlen in Progressionen kommt. Dazu wird die Zählfunktion von Primzahlen p in einer Restklasse $a \bmod q$ untersucht, das ist $\pi(x;q,a) := \#\{p \le x;\ p \equiv a\ (q)\}$. Wenn a und q teilerfremd sind, können wir erwarten, dass es unendlich viele Primzahlen $p \equiv a\ (q)$ gibt. Diese Aussage heißt Dirichletscher Primzahlsatz, den wir zeigen werden.

• Für das Verständnis von bestimmten Primzahlmengen ist dabei das Konzept von Dichten nützlich, das wir in diesem Kapitel behandeln.

23.2. Def.: Sei A eine Teilmenge von $\mathbb{N}$. Für jedes $x > 0$ setze $A(x) := \#\{n \in A;\ n \le x\}$.

• Konvergiert $\frac{A(x)}{x}$ für $x \to \infty$, so sagt man, A besitze die

$$\text{(natürliche) Dichte} \quad d(A) := \lim_{x\to\infty} \frac{A(x)}{x}.$$

• Allgemeiner: Für $A \subseteq B \subseteq \mathbb{N}$ sagen wir, A besitze in B die (natürliche) Dichte c, wenn $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{A(x)}{B(x)} = c$. Wir setzen $d_B(A) := c$.

• Der Grenzwert

$$\delta_B(A) := \lim_{s\to 1+} \frac{\sum_{n\in A} n^{-s}}{\sum_{n\in B} n^{-s}},$$

falls existent, heißt Dirichlet-Dichte von A in B.

Wie für d setzen wir $\delta(A) := \delta_{\mathbb{N}}(A)$.

23.3. **Bem.:** Für vorgegebene $A \subseteq B$ ist die Entscheidung, ob $d_B(A)$ existiert, oft schwer. Da kann es einfacher sein, zu untersuchen, ob die Dirichlet-Dichte $\delta_B(A)$ existiert, wie der folgende Satz suggeriert, der für $B=\mathbb{N}$ bzw. $B=\mathbb{P}$ auf Dirichlet zurückgeht.

23.4. **Satz (über Dirichlet-Dichten):** Für $B \subseteq \mathbb{N}$ sei $\sum_{n\in B} \frac{1}{n}$ divergent, und es sei $A \subseteq B$.
Existiert $d_B(A)$, so auch $\delta_B(A)$, und es ist $d_B(A) = \delta_B(A)$.

Bew.: Setze $c := d_B(A)$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es ein $T > 0$ mit $\left|\frac{A(t)}{B(t)} - c\right| < \varepsilon$ für alle $t \geq T$, also

$$\circledast \quad |A(t) - cB(t)| < \varepsilon B(t) \text{ für alle } t \geq T.$$

Sei a die charakteristische Funktion von A, also $a(n) = \begin{cases} 1, & \text{für } n\in A, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

Dann ist

$$\sum_{\substack{n\in A\\ n\leq x}} n^{-s} = \sum_{n\leq x} \frac{a_n}{n^s} \underset{\substack{\text{part.}\Sigma\\ (f(t)=t^{-s})}}{=} A(x)\cdot x^{-s} + s\int_1^x A(t)\, t^{-s-1}\,dt.$$

Für $x\to\infty$ erhält man (mit $s>1$ reell), dass

$$f(s) := \sum_{n\in A} n^{-s} = s\int_1^\infty A(t)\, t^{-s-1}\,dt, \text{ entsprechend ist}$$

$$g(s) := \sum_{n\in B} n^{-s} = s\int_1^\infty B(t)\, t^{-s-1}\,dt.$$

Somit ist $f(s) - cg(s) = s\int_1^\infty (A(t) - cB(t))\,t^{-s-1}\,dt = \underbrace{s\int_1^T \cdots}_{=:\alpha_1} + \underbrace{s\int_T^\infty \cdots}_{=:\alpha_2}$

Für $1 < s \leq 2$ ist

$$|\alpha_1| \leq \underbrace{2\int_1^T |A(t) - cB(t)|\,t^{-2}\,dt}_{\text{unabh. von } s} =: C_T$$

und $|\alpha_2| \underset{\circledast}{<} s\varepsilon \int_T^\infty B(t)\,t^{-s-1}\,dt \leq \varepsilon s\int_1^\infty B(t)\,t^{-s-1}\,dt = \varepsilon g(s)$.

Insgesamt ist daher $|f(s) - g(s)| \leq C_T + \varepsilon g(s)$, also

$$\left|\frac{f(s)}{g(s)} - c\right| \leq \frac{C_T}{g(s)} + \varepsilon \text{ für } 1 < s \leq 2.$$

Doch $g(s)\to\infty$ für $s\to 1+$ (da nach Vor. $\sum_{n\in B} n^{-1}$ div., und g monoton).
Also geht die r.S. in voriger Ungleichung für $s\to 1+$ gegen ε, es folgt die Beh. $\square$

Wir zeigen einige Beispiele für Dichtesätze für $\mathbb{P}$.

23.5 Bsp.: $\delta(\mathbb{P}) = 0$. (Existiert also $d(\mathbb{P})$, so ist nach 23.4 dann $d(\mathbb{P}) = 0$.)

Bew.: Haben $\boxplus$ $\sum_{p\in\mathbb{P}} p^{-s} \sim \log(\zeta(s))$ für $s \to 1+$ [denn nach der Eulerproduktdarst. 9.2 ist für $s>1$: $\zeta(s) = \prod_{p\in\mathbb{P}} (1-p^{-s})^{-1} \rightsquigarrow \log(\zeta(s)) = \sum_{p\in\mathbb{P}} p^{-s} + \underbrace{\sum_{p\in\mathbb{P}} \sum_{k\geq 2} \frac{1}{k} p^{-ks}}_{\text{beschränkt für } s\to 1+, \text{ vgl. Bew. von } 9.2\,(i)} \sim \sum_{p\in\mathbb{P}} p^{-s}$].

Daraus folgt wegen
$$\frac{\sum_{p\in\mathbb{P}} p^{-s}}{\sum_{n\in\mathbb{N}} n^{-s}} = \frac{\sum_{p\in\mathbb{P}} p^{-s}}{\zeta(s)} = \frac{\sum_{p\in\mathbb{P}} p^{-s}}{\log(\zeta(s))} \cdot \frac{\log(\zeta(s))}{\zeta(s)}$$
die Behauptung, denn für $s \to 1+$ gilt $\zeta(s) \to \infty$ und $\frac{\log(x)}{x} \to 0$ für $x \to \infty$. □

23.6. Bsp.: $d(\mathbb{P}) = 0$.

Bew.: Zu zeigen ist $\frac{\pi(x)}{x} \xrightarrow{x\to\infty} 0$. Das folgt bereits aus der Tschebyschev-Abschätzung $\pi(x) \ll \frac{x}{\log(x)}$, da $\frac{1}{\log(x)} \xrightarrow{x\to\infty} 0$. □

23.7. Bsp.: Für die Menge $A := \{n \in \mathbb{N};\ \mu^2(n) = 1\}$ der quadratfreien Zahlen gilt
$\delta(A) = \frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2}$. (Existiert $d(A)$, so folgt mit 23.4 auch $d(A) = \frac{6}{\pi^2}$, [Vor. $\sum_{n\in A} \frac{1}{n} \geq \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}$ div. erfüllt.])

Bew.: Da μ^2 die charakteristische Fkt. von A ist, folgt
$$\sum_{n\in A} n^{-s} = \sum_{n\geq 1} \frac{\mu^2(n)}{n^s} = \prod_p (1+p^{-s}) = \prod_p \frac{1-p^{-2s}}{1-p^{-s}} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} \text{ für } s>1,$$
also
$$\frac{\sum_{n\in A} n^{-s}}{\sum_{n\in\mathbb{N}} n^{-s}} = \frac{1}{\zeta(2s)} \xrightarrow{s\to 1+} \frac{1}{\zeta(2)}. \quad \square$$

23.8. Bem.: Die Beh. $d(A) = \frac{6}{\pi^2}$ zu zeigen, d.h. wegen 23.4 die Existenz von $d(A)$, geht, ist aber komplizierter.

23.9 Satz: (1) Für die Dirichlet-Dichte von $A \subseteq \mathbb{N}$ hat man die äquivalente Definition
$$\delta(A) = \lim_{s\to 1+} (s-1) \sum_{n\in A} n^{-s}.$$
(2) Für die Dirichlet-Dichte von $A \subseteq \mathbb{P}$ hat man die äquivalente Definition
$$\delta_{\mathbb{P}}(A) = \lim_{s\to 1+} \frac{\sum_{p\in A} p^{-s}}{\log\left(\frac{1}{s-1}\right)}.$$
($\rightsquigarrow$ Für jede endliche Teilmenge $A \subseteq \mathbb{P}$ gilt $\delta_{\mathbb{P}}(A) = 0$)

Bew.: Zu (1):
Es ist $\frac{\sum_{n\in A} n^{-s}}{\zeta(s)} = (s-1)\sum_{n\in A} n^{-s}\cdot\frac{1}{(s-1)\zeta(s)}$, woraus (1) folgt wegen $\lim_{s\to 1+}(s-1)\zeta(s)=1$.

Zu (2): Aus $\lim_{s\to 1+}(s-1)\zeta(s)=1$ folgt $\log(\zeta(s))+\log(s-1)\xrightarrow{s\to 1+}0$, und somit
$$\log(\zeta(s))\sim-\log(s-1)=\log\left(\frac{1}{s-1}\right),\ s\to 1+.$$
Doch nach $\boxed{+}$ in 23.5 haben wir $\sum_{p\in\mathbb{P}} p^{-s}\sim\log(\zeta(s))$, also $\sum_{p\in\mathbb{P}} p^{-s}\sim\log\left(\frac{1}{s-1}\right)$ für $s\to 1+$.
Nun ist
$$\underbrace{\frac{\sum_{p\in A} p^{-s}}{\sum_{p\in\mathbb{P}} p^{-s}}}_{\xrightarrow[s\to 1+]{}\delta_{\mathbb{P}}(A)} = \frac{\sum_{p\in A} p^{-s}}{\log\left(\frac{1}{s-1}\right)}\cdot\underbrace{\frac{\log\left(\frac{1}{s-1}\right)}{\sum_{p\in\mathbb{P}} p^{-s}}}_{\xrightarrow[s\to 1+]{}1},$$
es folgt die Beh. (2). □

23.9. Bem.: Ziel unserer Bemühungen im Teil II der Vorlesung wird nun folgendes Ergebnis sein.

23.10. Satz (Dirichletscher Primzahlsatz): Sei $q\in\mathbb{N}$. Für jedes zu q teilerfremde $a\in\mathbb{Z}$ setze $P_{a,q}:=\{p\in\mathbb{P};\ p\equiv a\ (q)\}$. • Dann existiert $\delta_{\mathbb{P}}(P_{a,q})$,
und es gilt $\delta_{\mathbb{P}}(P_{a,q})=\frac{1}{\varphi(q)}$ (unabhängig von a!).

• Insbesondere ist also jedes $P_{a,q}$ unendlich, d.h. zu jedem a mit $(a,q)=1$ gibt es unendlich viele Primzahlen mit $p\equiv a\ (q)$.

• Es gilt sogar $d_{\mathbb{P}}(P_{a,q})=\frac{1}{\varphi(q)}$, d.h. $\lim_{x\to\infty}\frac{P_{a,q}(x)}{\pi(x)}=\frac{1}{\varphi(q)}$.
Für $P_{a,q}(x)$ schreibt man für gewöhnlich
$\pi(x;q,a)$, d.h. $\pi(x;q,a):=\#\{p\in\mathbb{P};\ p\le x,\ p\equiv a\ (q)\}$.

23.11. Bem.:

• Wir zeigen $d_{\mathbb{P}}(P_{a,q})=\frac{1}{\varphi(q)}$ durch Beweis der Formel $\pi(x;q,a)\sim\frac{1}{\varphi(q)}\cdot\frac{x}{\log(x)}$ für $x\to\infty$, $(a,q)=1$.
Diese nennt man den PZS für arithmetische Progressionen.
(Bei PZen in Restklassen $p\equiv a\ (q)$ hat man ja PZen in der arithmetischen Progression (wird oft mit AP abgekürzt) $a,\ a+q,\ a+2q,\ a+3q,\dots$)

• Dieser Satz verallgemeinert den PZS, bzw. man kann den PZS daraus herleiten:
Beachtet man, dass nur endlich viele $p\in\mathbb{P}$ nicht teilerfremd zu q sind, ergibt eine Summation des PZSes für APs, dass $\pi(x)\sim\sum_{\substack{1\le a\le q\\(a,q)=1}}\pi(x;q,a)\sim\varphi(q)\cdot\frac{1}{\varphi(q)}\cdot\frac{x}{\log(x)}=\frac{x}{\log(x)}$.
Im übrigen geht der PZS für APs mit $q=1$ direkt in den PZS über.