Vorlesung Analytische Zahlentheorie

SoSe '22, hhu
K. Halupczok

AnZ 22: Die Riemannsche Vermutung

Stichworte: Riemannsche Vermutung (RH), Nullstellenanzahl, explizite Formel, Vielfachheit der Nullstellen, von-Mangoldt-explizite Formel, Resttermabschätzung im PZS und Realteile der Zetanullstellen, konditionelle und unkonditionelle Aussagen

---

22.1. Einleitung: Zum Beweis des PZSes $\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)}$ war vor allem die Nullstellenfreiheit von ζ auf $s = 1+it$, $t \in \mathbb{R}$, ein wichtiger Baustein. Die Zusammenhänge zwischen ζ-Nullstellenfreiheit und Primzahlverteilung lassen sich noch weiter präzisieren in Form der expliziten Formel. Laut Riemannscher Vermutung sollten alle nichttrivialen Nst. von ζ den Realteil $\frac{1}{2}$ besitzen; in diesem Fall gibt die explizite Formel die zur Riemannschen Vermutung äquivalente Aussage $\psi(x) = x + O(x^{1/2}\log^2 x)$.

22.2. Die Riemannsche Vermutung (RH) besagt, dass alle Nullstellen $\varrho = \beta + i\gamma$ von ζ im kritischen Streifen $0 < \sigma < 1$ den Realteil $\beta = \frac{1}{2}$ besitzen.
Numerische Daten (und auch andere Gründe) legen dies sehr nahe.

22.3. Bem.: • Die ersten 6 Nst. sind: $\varrho_1 = \frac{1}{2} + 14.13i$, $\varrho_2 = \frac{1}{2} + 21.02i$, $\varrho_3 = \frac{1}{2} + 25.01i$, $\varrho_4 = \frac{1}{2} + 30.42i$, $\varrho_5 = \frac{1}{2} + 32.94i$, $\varrho_6 = \frac{1}{2} + 37.59i$.

• [Gourdon, Demichel 2004]: Re $\varrho_n = \frac{1}{2}$ für $n \leq 10^{13}$ = 10 Billionen.

• Es liegen unendlich viele Nullstellen von ζ im kritischen Streifen (beweisbar z.B. mit dem Hadamardschen Produktsatz auf $\xi(s)$ angewendet, vgl. [Brüdern, Kap. 2.5, Satz 2.5.4]).

• Es gilt eine Abschätzung für die Zählfunktion N der nichttrivialen Nst:

22.4. Def.: Für $T > 0$ sei $N(T) := \#\{\varrho \in \mathbb{C};\ \zeta(\varrho) = 0,\ 0 < \mathrm{Im}(\varrho) < T,\ 0 < \mathrm{Re}(\varrho) < 1\}$.

22.5. Lemma: Es ist $N(T+1) - N(T) = O(\log(T))$ für $T \to \infty$.

Somit gilt $N(T) \ll T\log(T)$.

[ohne Beweis. Die Anzahl der Nullstellen im Rechteck $(0; iT), (1; iT), (1, i(T+1)), (0; i(T+1))$ überschreitet also nicht $c \cdot \log(T)$, wo $c > 0$ eine absolute Konstante ist.]

AnZ 22
-2-

Die Zusammenhänge zwischen der Nullstellenfreiheit von ζ auf $1+it$, $t\in\mathbb{R}$ (und dann wegen der Stetigkeit von ζ nahe $1+it$, $t\in\mathbb{R}$) und der Tschebyscheuschen PZ Zählfkt. $\psi(x) := \sum_{n\le x} \Lambda(n)$ lassen sich konkret formulieren:

22.6. Satz (explizite Formel): • Sei $x = m+\frac{1}{2}$ und $m\in\mathbb{N}$. Dann ist

für $x\geq 1$ und $1\le T\le x$: $\psi(x) = x - \sum_{\substack{\rho \\ |\mathrm{Im}(\rho)|\le T}} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x}{T}\log^2(x)\right)$ für $x\to\infty$.

• Es gilt also $\psi(x) = x - \sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho} + O(1)$ für $x\to\infty$.

wobei $\rho\in\mathbb{C}$ alle Nullstellen von ζ mit $0<\mathrm{Re}(\rho)<1$ durchläuft.

Dabei kommen in der Summe die Nullstellen gemäß ihrer Vielfachheit vor (d.h. eine doppelte Nullstelle ergibt darin zwei (gleiche) Summanden usw.). [Ohne Beweis]

22.7. Notation: • Für die nichttrivialen Nullstellen $\rho\in\mathbb{C}$ von ζ schreibt man $\rho = \beta + i\gamma$, wo also $0<\beta<1$, $\gamma\in\mathbb{R}$ (also $|\gamma|>14$ laut numerischen Werten).

• Werden die Nullstellen mit $\gamma>0$ durchnummeriert, schreibt man $\rho_n = \beta_n + i\gamma_n$, $n\in\mathbb{N}$.

Aus der Funktionentheorie ist bekannt, dass sich Nullstellen einer holomorphen Fkt. nirgendwo häufen.

22.8. Bem.: • Man vermutet, dass alle diese Nullstellen einfache Nullstellen sind, so dass in der Summe alle Summanden tatsächlich verschieden sind.

• Ohne O-Termen kann die explizite Formel auch gezeigt werden, dies gibt folgende Version:

22.9. Satz (die von-Mangoldt-explizite Formel):

Sei $\psi_0(x) := \frac{1}{2}\left(\sum_{n<x}\Lambda(n) + \sum_{n\le x}\Lambda(n)\right)$. ⌜also ist $\psi_0(x)=\psi(x)$ für $x\notin\mathbb{Z}$⌟

Dann ist

$$\psi_0(x) = x - \sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{1}{2}\log\left(1-\frac{1}{x^2}\right) - \log(2\pi),$$

wo ρ genau die Nst. von ζ in $0<\sigma<1$ gemäß Vielfachheiten durchläuft. ⌜ohne Beweis⌟

Wir gehen den Zusammenhängen zwischen Nullstellenfreiheit von ζ in $0<\sigma<1$ und PZS-Versionen mit Resttermabschätzung noch genauer auf den Grund.

22.10. Def.: Seien $A := \inf\{\alpha;\ \forall \varepsilon>0: \psi(x) = x + O_\varepsilon(x^{\alpha+\varepsilon})\}$,

und $B := \sup\{\beta;\ \exists\ \rho = \beta + i\gamma : \zeta(\rho) = 0\}$.

22.11. **Bem.:** A ist also der kleinste Exponent ≤ 1 in der Resttermabschätzung für den PZS in der ψ-Version, und B das Supremum der Realteile der ζ-Nullstellen.

22.12. **Satz:** Es gilt $A = B$. Insbesondere gilt:

$$(RH) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \psi(x) = x + O_\varepsilon(x^{1/2+\varepsilon}) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \pi(x) = li(x) + O_\varepsilon(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}).$$

Bew.: • $A \leq B$: Wende die explizite Formel 22.6 an mit $T = x$.

Für $x = m + \frac{1}{2}$, $m \in \mathbb{N}$, erhalten wir $\psi(x) = x - \sum_{|\gamma| \leq x} \frac{x^\rho}{\rho} + O(\log^2 x)$.

Haben $\left|\sum_{|\gamma| \leq x} \frac{x^\rho}{\rho}\right| \leq 2x^B \left(\sum_{1 \leq \gamma \leq x} \frac{1}{\gamma} + O(1)\right)$.

$\left\ulcorner \sum_{|\gamma| \leq 1} \frac{1}{|\rho|} = O(1)\right.$, nahe 0 liegen keine Nst. von ζ, da $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$ & Stetigkeit $\lrcorner$

Wähle J mit $2^J \leq x < 2^{J+1}$,
erhalten $\sum_{1 \leq \gamma \leq x} \frac{1}{\gamma} \leq \sum_{j=0}^{J} 2^{-j} \sum_{2^j \leq \gamma \leq 2^{j+1}} 1 = \sum_{j=0}^{J} 2^{-j} (N(2^{j+1}) - N(2^j))$.

Haben $N(2^{j+1}) - N(2^j) = O(2^j \log 2^j) = O(j 2^j)$ nach Lemma 22.5,
also $\sum_{1 \leq \gamma \leq x} \frac{1}{\gamma} = \sum_{j=0}^{J} O(j) = O(J^2) = O(\log^2 x)$.

Somit folgt: $\psi(x) = x + O_\varepsilon(x^{B+\varepsilon})$ für alle $\varepsilon > 0$, also $A \leq B$.

• $B \leq A$: Es gilt $\forall \varepsilon > 0 : \psi(x) = x + O_\varepsilon(x^{A+\varepsilon})$.

Für $\sigma > 1$ setzen wir $F(s) := -\frac{1}{s} \cdot \frac{\zeta'}{\zeta}(s) - \frac{1}{s-1}$, $G(s) := \int_1^\infty (\psi(x) - x) x^{-s-1} dx$.

Eine partielle Summation (für $\sigma > 1$) zeigt, dass

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{n \geq 1} \Lambda(n) n^{-s} = s \int_1^\infty \psi(x) x^{-s-1} dx, \text{ vgl. Bew. 1.) in 15.2},$$

also

$$F(s) = -\frac{1}{s} \cdot \frac{\zeta'}{\zeta}(s) - \frac{1}{s-1} = \int_1^\infty \underbrace{(\psi(x) - x)}_{\ll_\varepsilon x^{A+\varepsilon}} x^{-s-1} dx = G(s).$$

Somit ist die Folge $G_N(s) := \int_1^N (\psi(x) - x) x^{-s-1} dx$ in $\sigma > A$ kp. kgt. gegen $G(s)$.

Damit ist $G(s)$ holom. für $\sigma > A$, und $F(s)$ hat keinen Pol für $\sigma > A$.
Dies heißt $\zeta(s) \neq 0$ für $\sigma > A$, woraus $B \leq A$ folgt. $\square$

22.13. **Bem.:** • Man betrachte auch $\tilde{A} := \inf\{\alpha;\ \forall \varepsilon>0 : \pi(x) = li(x) + O_\varepsilon(x^{\alpha+\varepsilon})\}$,
Eine partielle Summation zeigt $\tilde{A} = A$. • Ob $A<1$ bzw. $B<1$, ist unbekannt.
• Nimmt man die (RH) an, kann für Ψ bzw. π eine noch schärfere Asymptotik gezeigt werden:

22.14. **Kor.:** (RH) $\Rightarrow \Psi(x) = x + O(x^{1/2}\log^2 x)$. $\xrightarrow{\text{part.}\Sigma} \pi(x) = li(x) + O(x^{1/2}\log(x))$, vgl. 12.10

Bew.: Obiger Bew. in "$A \le B$" zeigt $\sum_\varrho \frac{x^\varrho}{\varrho} = O(x^B \log^2 x)$, also $\Psi(x) = x + O(x^B \log^2 x)$.
Ist die (RH) wahr, gilt $B = \frac{1}{2}$, es folgt die Beh. □

21.15. **Bem.:** • Es gibt noch sehr viele andere Aussagen, die zur (RH) äquivalent sind. Für gewöhnlich kann man für die Implikationen "(RH) $\Rightarrow$ …" dann Verschärfungen finden.
• Zur Sprechweise: Mathematische Aussagen, die unter der Ann. der (RH) gelten [manchmal auch unter Ann. anderer unbewiesener Vermutungen], heißen konditionell. Aussagen, die ohne Annahme unbewiesener Vermutungen (o.A.u.V.) gezeigt werden können, heißen unkonditionell.
• Äquivalent zur (RH) ist z.B. die folgende Behauptung:
Die Mertensfunktion $M(x) := \sum_{n\le x} \mu(n)$ erfüllt $M(x) \ll x^{1/2+\varepsilon}$ [Littlewood 1912],
[Die sog. Mertensvermutung $|M(x)| \le x^{1/2}$ wurde widerlegt, [Odlyzko/te Riele 1985]],
• Unter Ann. der (RH) kann man die Abschätzung von $M(x)$ verschärfen zu
$$M(x) \ll_\varepsilon x^{1/2} \cdot \underbrace{\exp\left(\sqrt{\log(x)} \cdot (\log\log(x))^{14}\right)}_{\text{subexponentiell in } \log(x)}. \quad \text{[Soundararajan 2009]}$$
Dies ist ein Beispiel für ein konditionelles Ergebnis.