Vorlesung Analytische Zahlentheorie

SoSe'22, hhu
K. Halupczok

AnZ 21: Sätze von Mertens

Stichworte: Zwei asymptotische Formeln für $\sum_{p\le x}\frac{1}{p}$, Meissel-Mertens-Konstante, Satz von Mertens für $\prod_{p\le x}(1-\frac{1}{p})$ mit $e^{-\gamma}$, asymptotische Formeln für die Eulerprodukte $\prod_{p\le x}(1+\frac{\kappa}{p})$ mit $\kappa>0$, speziell für $\kappa=1$.

21.1. Einleitung: Wir beweisen eine ziemlich genaue Asymptotik für $\sum_{p\le x}\frac{1}{p}$, die darin vorkommende Konstante heißt Meissel-Mertens-Konstante. Sie folgt aus einer Asymptotik für das Produkt $\prod_{p\le x}(1-\frac{1}{p})$, die mit $e^{-\gamma}$ zusammenhängt. Diese Formeln heißen Mertens-Sätze. Zur Vorbereitung (hatten wir) zwei Lemmas.

21.2. Lemma: $\sum_{n\le x}\frac{\Lambda(n)}{n}=\log(x)+O(1)$.

Bew.: Dies ist eine direkte Folgerung von Lemma 11.14, vgl. Ü Bl. 8 A1(a).

21.3. Lemma: $\sum_{p\le x}\frac{\log(p)}{p}=\log(x)+O(1)$.

Bew.: Dies folgt aus Lemma 21.2 durch Abschätzung von $\sum_{\substack{p^k\le x\\ k\ge 2}}\frac{\log(p)}{p^k}\ll 1$, vgl. Ü Bl. 8 A1(b).

Wir zeigen damit nun eine Asymptotik der Summe $\sum_{p\le x}\frac{1}{p}$. Aus AnZ 17 und Ü Bl. 11 A1(a) ist bereits $\log\log(x)\ll\sum_{p\le x}\frac{1}{p}\ll\log\log(x)$ bekannt. Mit der partiellen Summation
$$\sum_{p\le x}\frac{1}{p}=\sum_{p\le x}\frac{\log p}{p}\cdot\frac{1}{\log p}=\Big(\sum_{p\le x}\frac{\log p}{p}\Big)\cdot\frac{1}{\log(x)}+\int_2^x\Big(\sum_{p\le t}\frac{\log p}{p}\Big)\frac{dt}{t\log^2(t)}$$
kann Lemma 21.3 eingesetzt werden, um zumindest $1+O(\frac{1}{\log x})+\int_2^x\frac{1}{t\log t}\,dt+O\Big(\underbrace{\int_2^x\frac{dt}{t\log^2 t}}_{=-\frac{1}{\log t}\big|_2^x}\Big)=\log\log(x)+O(1)$ zu zeigen. Darin kann $O(1)$ weiter spezifiziert werden.

21.4. Satz (Mertens): Es gibt eine Konstante $\beta\in\mathbb{R}$ so, dass
$$\sum_{p\le x}\frac{1}{p}=\log\log(x)+\beta+O\Big(\frac{1}{\log(x)}\Big)$$
für $x\to\infty$. (Insb. bleibt das Vorzeichen von β hier unklar.)

Bew.: Die genannte partielle Summation zeigt mit $\sum_{p\le t}\frac{\log(p)}{p}=:\log(t)+R(t)$ mit $R(t)\ll 1$, dass
$$\sum_{p\le x}\frac{1}{p}=1+O\Big(\frac{1}{\log(x)}\Big)+\int_2^x(\log(t)+R(t))\frac{dt}{t\log^2(t)}=1+O\Big(\frac{1}{\log(x)}\Big)+\int_2^x\frac{dt}{t\log(t)}+\int_2^x\frac{R(t)}{t\log^2(t)}\,dt$$
$$=1+O\Big(\frac{1}{\log(x)}\Big)+\log\log(x)-\log\log(2)+\underbrace{\int_2^\infty\frac{R(t)}{t\log^2(t)}\,dt}_{\substack{\text{kgt., da } R(t)\ll 1\\ \text{und } \int_2^\infty\frac{1}{t\log^2(t)}dt=-\frac{1}{\log(t)}\big|_2^\infty=\frac{1}{\log(2)}\text{ ex.}}}-\int_x^\infty\frac{R(t)}{t\log^2(t)}\,dt=\log\log(x)+\Big(1-\log\log(2)+\int_2^\infty\frac{R(t)}{t\log^2 t}\,dt\Big)+O\Big(\frac{1}{\log(x)}\Big),$$
denn $\int_x^\infty\frac{R(t)}{t\log^2(t)}\,dt\ll\int_x^\infty\frac{1}{t\log^2(t)}\,dt=-\frac{1}{\log(t)}\Big|_x^\infty=\frac{1}{\log(x)}$. Also: $\beta=1-\log\log(2)+\int_2^\infty\frac{R(t)}{t\log^2 t}\,dt$. □

Dass der Wert der Konstanten β im Satz 21.4 von Mertens noch genauer bestimmt werden kann, zeigen wir jetzt mit etwas mehr Aufwand.
Man nennt β die Meissel-Mertens-Konstante. Ihr Wert ergibt sich aus Satz 21.6.

Dies erhalten wir über einen anderen Zugang zu $\sum_{p\le x}\frac{1}{p}$ und Vergleich mit 21.4.

21.5. Satz: Es gilt für $x\ge 2$, dass $\sum_{p\le x}\frac{1}{p} = \log\left(\prod_{p\le x}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\right) - \alpha + O\left(\frac{\log x}{x}\right)$,
wo $\alpha := \sum_p \left(\log\left(\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\right) - \frac{1}{p}\right)$,

Bem.: (Abs.) Kgz. der Reihe für α klar, da $-\log(1-x) = x + O(x^2)$ für $|x|<1$.

Bew.: Es gilt

$$\log\left(\prod_{p\le x}\left(1-\tfrac{1}{p}\right)^{-1}\right) = \sum_{p\le x}\left(\log\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\right) - \frac{1}{p}\right) + \sum_{p\le x}\frac{1}{p}$$

$$= \sum_{p\le x}\frac{1}{p} + \alpha - \underbrace{\sum_{p>x}\Bigg(\underbrace{\log\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\right)}_{=\frac{1}{p}+O\left(\frac{1}{p^2}\right)} - \frac{1}{p}\Bigg)}_{\ll \sum_{p>x}\frac{1}{p^2} \ll \int_x^\infty \frac{dt}{t^2} \ll \frac{1}{x}\cdot\log x}.$$

$\square$

21.6. Satz: Für die Konstanten in Satz 21.4 und Satz 21.5 gilt $\alpha + \beta = \gamma$,
wobei $\gamma \approx 0.5772$ die Euler-Mascheroni-Konstante ist,
d.h. $\gamma = \lim_{x\to\infty}\left(\sum_{n<x}\frac{1}{n} - \log(x)\right)$. Numerisch: $\beta \approx 0.26149\ldots$, $\alpha \approx 0.3157\ldots$

Bew.:
Für $\sigma>0$ haben wir $\zeta(1+\sigma) = \sum_{n\ge 1} n^{-1-\sigma} = \prod_p \left(1-p^{-1-\sigma}\right)^{-1}$
laut Euler $\prod$ darstellung AnZ 9.2.
Def. $f(\sigma) := \log\zeta(1+\sigma) - \sum_p p^{-1-\sigma} = \sum_p \left(\log\left(\frac{1}{1-p^{-1-\sigma}}\right) - p^{-1-\sigma}\right)$

$$\le p^{-2(1+\sigma)} + p^{-3(1+\sigma)} + \ldots \le \frac{1}{p(p-1)}.$$

Die unendliche Reihe konvergiert daher gleichmäßig für $\sigma\ge 0$.
Insbesondere ist $f(\sigma)$ stetig in $\sigma = 0$.
Es folgt $\lim_{\sigma\to 0+} f(\sigma) = f(0) = \alpha$.

Wir formen jetzt $f(\sigma)$ um: Schreibe $Q(u) := \sum_{p\le u} \frac{1}{p}$.

• part. Σ gibt: $\sum_p p^{-1-\sigma} = \sum_p p^{-1} \cdot p^{-\sigma}$

$$= \lim_{x\to\infty}\Big(\underbrace{\Big(\sum_{p\le x}\frac{1}{p}\Big)x^{-\sigma}}_{\to 0} + \sigma\int_1^x \Big(\sum_{p\le u}\frac{1}{p}\Big)u^{-\sigma-1}du\Big)$$

$$= \sigma\int_1^\infty Q(u)\,u^{-\sigma-1}du \underset{u=e^t}{=} \sigma\int_0^\infty e^{-\sigma t}Q(e^t)\,dt$$

• Andererseits ist

$$\log\zeta(1+\sigma) = \log\Big(\tfrac{1}{\sigma}(1+O(\sigma))\Big) = \log\big(\tfrac{1}{\sigma}\big) + \log(1+O(\sigma)) = \log\Big(\frac{1}{1-e^{-\sigma}}\Big) + O(\sigma)$$

Pol von ζ bei $s=1$

$$= \sum_{m\ge 1} m^{-1}\cdot e^{-\sigma m} + O(\sigma), \quad \text{für } \sigma\to 0+.$$

Setze $H(t) := \sum_{m\le t}\frac{1}{m}$.

Hierfür gibt part. Σ also: $\log\zeta(1+\sigma) = \sigma\int_1^\infty e^{-\sigma t}H(t)\,dt + O(\sigma)$.

•Also: $f(\sigma) = \sigma\int_0^\infty e^{-\sigma t}\big(H(t)-Q(e^t)\big)dt + O(\sigma)$.

benutze Ex. von β hier

mit $H(t) = \log(t) + \gamma + O(\frac{1}{t})$ und $Q(e^t) = \log(t) + \beta + O(\frac{1}{t})$ aus 21.4

folgt $f(\sigma) = \sigma\int_0^\infty e^{-\sigma t}\big(\gamma-\beta+O(\frac{1}{t+1})\big)dt + O(\sigma)$

$$= \gamma-\beta+O\Big(\sigma+\sigma\int_0^\infty \frac{e^{-\sigma t}}{t+1}dt\Big).$$

$\Big[\sigma\int_0^\infty e^{-\sigma t}dt = -e^{-\sigma t}\Big|_0^\infty = 1\Big]$

Haben $\int_0^\infty \frac{e^{-\sigma t}}{t+1}dt \le \int_0^{1/\sigma}\frac{dt}{t+1} + \overbrace{\sigma\int_{1/\sigma}^\infty e^{-\sigma t}dt}^{O(1)} = O(\log(\tfrac{1}{\sigma}))$,

also $f(\sigma) = \gamma-\beta+O(\sigma\log(\frac{1}{\sigma})+\sigma)$ und $\alpha = \lim_{\sigma\to 0+} f(\sigma) = \gamma-\beta$. □

Insbesondere ist folgender Satz als "Satz von Mertens" bekannt.

21.7. Satz (Mertens): Es gilt die Asymptotik $\prod_{p\le x}(1-\frac{1}{p}) = \frac{e^{-\gamma}}{\log(x)}\Big(1+O\big(\frac{1}{\log(x)}\big)\Big)$ für $x\to\infty$.

Bew.: Aus 21.5 folgt $\log\Big(\prod_{p\le x}(1-\frac{1}{p})^{-1}\Big) = \sum_{p\le x}\frac{1}{p} + \alpha + O\big(\frac{\log(x)}{x}\big)$

$$\underset{21.4}{=} \log\log(x) + \alpha + \beta + O\Big(\frac{1}{\log(x)}\Big), \text{ also } \prod_{p\le x}(1-\tfrac{1}{p}) = \frac{e^{-\alpha-\beta}}{\log(x)}\Big(1+O\big(\tfrac{1}{\log(x)}\big)\Big).$$

[Die Existenz von β wird hier benutzt.]

$$e^{O(\frac{1}{\log x})} = 1+O\Big(\frac{1}{\log(x)}\Big)$$

Mit Satz 21.6 folgt $\alpha+\beta=\gamma$ und somit die Beh. □

Mit den Mertens-Sätzen folgen andere interessante Asymptotiken und Abschätzungen für häufig auftauchende Eulerprodukte. Hier eine Auswahl.

21.8. **Kor.:** $\prod_{p\le x}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} = e^{\gamma}\log(x) + O(1)$.

Bew.: Aus 21.7 unter Verwendung von $\frac{1}{1+O(\frac{1}{\log(x)})} = 1+O(\frac{1}{\log(x)})$. □

21.9 **Satz:** $\prod_{p\le x}\left(1+\frac{1}{p}\right) = \frac{6e^{\gamma}}{\pi^2}\log(x) + O(1)$ für $x\to\infty$.

Bew.: Haben $\prod_p\left(1-\frac{1}{p^2}\right) = \prod_p\left(\sum_{k\ge 0}\frac{\mu(p^k)}{p^{2k}}\right) \underset{\text{Euler }\Pi\text{ Satz 8.15(i)}}{\uparrow}{=} \sum_{n\ge 1}\frac{\mu(n)}{n^2} \underset{5.9.(2)}{\uparrow}{=} \frac{1}{\zeta(2)} \underset{\text{AnZ 6}}{\uparrow}{=} \frac{6}{\pi^2}$,

und $\left|\prod_p\left(1-\frac{1}{p^2}\right) - \prod_{p\le x}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\right| \le \sum_{\substack{k\ge 1\\ \exists p\mid k:\, p>x}}\frac{1}{k^2} \le \sum_{k\ge 1}\frac{1}{x^{1/2}k^{3/2}} = O\left(\frac{1}{x^{1/2}}\right)$, $\hookrightarrow k\ge x$

also $\prod_{p\le x}\left(1+\frac{1}{p}\right)\cdot\prod_{p\le x}\left(1-\frac{1}{p}\right) = \prod_{p\le x}\left(1-\frac{1}{p^2}\right) = \frac{6}{\pi^2} + O\left(\frac{1}{x^{1/2}}\right)$.

Einsetzen von Satz 21.7 hier

ergibt $\prod_{p\le x}\left(1+\frac{1}{p}\right) = \frac{6/\pi^2 + O(x^{-1/2})}{e^{-\gamma}/\log(x) + O(1/\log^2(x))} = \frac{6e^{\gamma}}{\pi^2}\log(x) + O(1)$. □

Dies ist noch verallgemeinerbar.

21.10. **Satz:** Für $\kappa>0$ gilt $\prod_{p\le x}\left(1+\frac{\kappa}{p}\right) = \delta_\kappa \log^\kappa(x)\left(1+O\left(\frac{1}{\log(x)}\right)\right)$ für $x\to\infty$,
mit einer Konstanten $\delta_\kappa>0$.

Bew.: Sei $V_\kappa(x) := \prod_{p\le x}\left(1+\frac{\kappa}{p}\right)$.

Dann ist $\log V_\kappa(x) = \kappa\log\log(x) + \kappa\beta + \alpha_\kappa + O_\kappa\left(\frac{1}{\log(x)}\right)$,

mit $\alpha_\kappa := \sum_p\left(\log\left(1+\frac{\kappa}{p}\right) - \frac{\kappa}{p}\right)$,

genauso herleitbar wie in 21.4/21.5. Eine Exponentiation zeigt die Beh.
mit $\delta_\kappa := e^{\kappa\beta+\alpha_\kappa}$. □