Vorlesung Analytische Zahlentheorie

SoSe'22, hhu
K. Halupczok

AnZ20: Die Poissonsche Summenformel

Stichworte: Fourierreihe und Fourierkoeffizienten, Dirichletkern, Fejérkern, Partialsummen der Fourierreihe, Fouriertransformierte von f, Poissonsche Summenformel

---

20.1. **Einleitung:** Wir beweisen die Poissonsche Summenformel aus der Theorie der Fourierreihen, welche in AnZ 19 benutzt wurde. Gegeben sei eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit Periode 1 (d.h. $f(x+1) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$).

Eine zentrale Frage der Theorie lautet: Wann kann $f(x)$ durch die Fourierreihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(n) \underbrace{e(nx)}_{= e^{2\pi i n x}}$ mit den Fourierkoeffizienten $\tilde{f}(n)$ dargestellt werden?

Diese Approximation von $F(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} f(m)$ mit der Fourierreihe führt dann zur Poissonschen Summenformel, die – kurz gesagt – die Formel $\sum_{m\in\mathbb{Z}} f(m) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)$ behauptet, wo $\hat{f}(n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e(-nt)\,dt$.
Wir benötigen zum Beweis bestimmte Hilfsfunktionen, die Dirichletkern und Fejérkern heißen.

20.2. **Def.:** • Für $x \in \mathbb{R}$ sei $e(x) := e^{2\pi i x} = \exp(2\pi i x)$.

Dann heißt $\tilde{f}(n) := \int_0^1 f(t) e(-nt)\,dt$ der n-te Fourierkoeffizient von f.

• Es sei $N \in \mathbb{N}_0$. Der N-te Dirichletkern D_N ist $D_N(x) := \sum_{|m| \le N} e(mx)$.

• Für $N \in \mathbb{N}_0$ ist der N-te Fejérkern F_N geg. durch $F_N(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} D_n(x)$.

20.3. **Satz:** 1) Sei $N \in \mathbb{N}_0$, $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$. Es gelten für $x \neq 0$ die Darstellungen

$$D_N(x) = \frac{e((N+\frac{1}{2})x) - e(-(N+\frac{1}{2})x)}{e(\frac{x}{2}) - e(-\frac{x}{2})}, \quad F_N(x) = \frac{1}{N+1}\left(\frac{e((N+\frac{1}{2})x) - e(-(N+\frac{1}{2})x)}{e(\frac{x}{2}) - e(-\frac{x}{2})}\right)^2,$$

2) Zudem gilt $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N} D_N(x) = \begin{cases} 1, & x=0 \\ 0, & x\neq 0 \end{cases}$ und $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} F_N(x) = \begin{cases} 1, & x=0 \\ 0, & x\neq 0, \end{cases}$

sowie $F_N(x) \ge 0$ für alle x und $\int_{-1/2}^{1/2} F_N(x)\,dx = 1$.

Weiter ist $\int_{-1/2,\ |x|\ge\delta}^{1/2} F_N(x)\,dx \le C N^{-1} \delta^{-2}$ für eine (absolute) Konstante $C > 0$.

Insbesondere gilt bei festem $\delta > 0$: $\lim_{N\to\infty} \int_{-1/2,\ |x|\ge\delta}^{1/2} F_N(x)\,dx = 0$.

Bew.: • Endliche geometrische Σ-Formel einsetzen:

$$D_N(x) = e(-Nx)\sum_{m=0}^{2N} e(mx) \overset{\downarrow}{=} e(-Nx)\cdot\frac{e((2N+1)x)-1}{e(x)-1} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{erweitern mit } e(-\frac{x}{2})}}{=} \frac{e((N+\frac12)x)-e(-(N+\frac12)x)}{e(\frac x2)-e(-\frac x2)},$$

gültig für $N\in\mathbb{N}_0$. Weiter $D_N(0)=2N+1$.

Die Darstellung für den Fejérkern ergibt sich durch eine analoge Rechnung:

$$F_N(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_n(x) = \frac{1}{N+1}\cdot\frac{1}{e(\frac x2)-e(-\frac x2)}\cdot\sum_{n=0}^{N}\left(e((n+\tfrac12)x)-e(-(n+\tfrac12)x)\right)$$

$$= \frac{1}{N+1}\cdot\frac{1}{(e(\frac x2)-e(-\frac x2))^2}\cdot\left(e(\tfrac x2)-e(-\tfrac x2)\right)\left(\sum_{n=0}^{N}\left(e((n+\tfrac12)x)-e(-(n+\tfrac12)x)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{N+1}\cdot\frac{1}{(e(\frac x2)-e(-\frac x2))^2}\cdot\underbrace{\sum_{n=0}^{N}\left(e((n+1)x)-e(-nx)-e(nx)+e(-(n+1)x)\right)}_{=e((N+1)x)\underbrace{-e(0)-e(0)}_{-2}+e(-(N+1)x)}$$

$$= \frac{1}{N+1}\cdot\frac{1}{(e(\frac x2)-e(-\frac x2))^2}\cdot\left(e(2\cdot\tfrac{N+1}{2}x)-2\cdot e(\tfrac{N+1}{2}x)\,e(-\tfrac{N+1}{2}x)+e(-2\cdot\tfrac{N+1}{2}x)\right)$$

$$= \frac{1}{N+1}\cdot\frac{1}{(e(\frac x2)-e(-\frac x2))^2}\cdot\left(e((N+\tfrac12)x)-e(-(N+\tfrac12)x)\right)^2.$$

Weiter ist $F_N(0)=\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}(2n+1)=\frac{1}{N+1}\cdot N(N+1)+1 = N+1$.

• Der Bruch $\dfrac{e((N+\frac12)x)-e(-(N+\frac12)x)}{e(\frac x2)-e(-\frac x2)} = \dfrac{\cancel{2i}\,\sin(2\pi(N+\frac12)x)}{\cancel{2i}\,\sin(2\pi\frac x2)}$ ist reell, also $F_N(x)\geq 0$.

• Die Voraussetzung $x\neq 0$ ist erforderlich, damit die Nenner $\neq 0$ sind. Die Ausdrücke lassen sich aber nach $x=0$ stetig fortsetzen, da $D_N(0)=2N+1$, $F_N(0)=N+1$.

• Es ist

$$\int_{-1/2}^{1/2} F_N(x)\,dx = \int_{-1/2}^{1/2}\left(\frac{1}{N+1}\sum_{m=0}^{N}\sum_{|j|\le m} e(jx)\right)dx = \frac{1}{N+1}\sum_{m=0}^{N}\left(\sum_{\substack{j=-m\\ j\neq 0}}^{m}\int_{-1/2}^{1/2} e(jx)\,dx+\int_{-1/2}^{1/2}1\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{N+1}\sum_{m=0}^{N}\left(\sum_{\substack{|j|\le m\\ j\neq 0}}\underbrace{\left[\frac{e(jx)}{2\pi i j}\right]_{x=-1/2}^{x=1/2}}_{=0}+1\right) = \frac{1}{N+1}\sum_{m=0}^{N}1 = 1.$$

Für $x\in[\delta,\frac12]$ gilt mit $e^{i\varphi}=\cos(\varphi)+i\sin(\varphi)$ und der Monotonie des Sinus auf $[0,\frac{\pi}{2}]$ nun die Abschätzung

$$|F_N(x)| = \frac{1}{N+1}\cdot\left|\frac{\sin((2N+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}\right|^2 \underset{\substack{\uparrow\\ x\geq\delta}}{\leq} \frac{1}{N+1}\cdot\frac{1}{\sin^2(\pi\delta)}.$$

Daraus folgt für $\delta\in\,]0,\frac12[$ fest, dass

$$\int_{\delta}^{1/2} F_N(x)\,dx \leq \frac{1/2-\delta}{N+1}\cdot\frac{1}{\sin^2(\pi\delta)},\quad \text{analog für } \int_{-1/2}^{-\delta}\cdots.$$

Beachte noch $\frac{1}{\sin^2(\pi\delta)} \ll \frac{1}{\delta^2}$. $\square$

Nun können die Partialsummen $S_f(x,N) := \sum_{n=-N}^{N} \tilde{f}(n) e(nx)$ der Fourierreihe mit dem Dirichletkern D_N dargestellt werden:

20.4. <u>Satz</u>: Es sei $N \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $S_f(x,N) = \int_0^1 f(t) D_N(x-t)\,dt$

und $\frac{1}{N+1} \sum_{n=-N}^{N} S_f(x,n) = \int_0^1 f(t) F_N(x-t)\,dt$.

<u>Bew.</u>:

Haben $\int_0^1 f(t) D_N(x-t)\,dt = \sum_{n=-N} \left(\int_0^1 f(t) e(-nt)\,dt \right) e(nx) = \sum_{n=-N} \tilde{f}(n)\, e(nx) = S_f(x,N)$.

Anwenden von $\frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N}$ darauf zeigt die 2. Formel. □

20.5. <u>Satz</u>: Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ zweimal stetig diff'bar mit Periode 1. Dann gilt

$\lim_{N\to\infty} S_f(x,N) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gleichmäßig.

20.6. <u>Bem.</u>: Die Vor. kann abgeschwächt werden zu "f einmal stetig diff'bar", der Satz erfordert dann aber mehr Beweisaufwand. (Vgl. auch AnZ 6, 1. Methode).

<u>Bew.</u>: • Die Fourierkoeffizienten $\tilde{f}(n)$ gehen schnell genug gegen 0:

Zweimalige partielle Integration zeigt

$$\tilde{f}(n) = \int_0^1 \underset{u}{f(t)}\,\underset{v'}{e(-nt)}\,dt = \underbrace{f(t)\frac{e(-nt)}{-2\pi i n}\Big|_0^1}_{=0 \text{ wegen Periodizität von } f} + \frac{1}{2\pi i n} \int_0^1 \underset{u}{f'(t)}\,\underset{v'}{e(-nt)}\,dt$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2 n^2} \int_0^1 f''(t) e(-nt)\,dt = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ für } n \to \infty.$$

Damit konvergieren die Partialsummen gleichmäßig, d.h.

$$S_f(x,N) = \sum_{n=-N}^{N} \tilde{f}(n)\, e(nx) \xrightarrow[N\to\infty]{} g(x)$$

gegen eine Grenzfunktion $g(x)$, und es bleibt, $f(x) = g(x)$ zu zeigen.

Zunächst folgt, dass auch die Folge der Mittelwerte der $S_f(x,N)$ gegen $g(x)$ konvergiert:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} S_f(x,n) = g(x). \qquad (1)$$

Nach den Sätzen 20.4, 20.3 folgt für festes $\delta > 0$, dass

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} S_f(x,n) \underset{20.4}{=} \lim_{N\to\infty} \int_{x-1/2}^{x+1/2} f(t) F_N(x-t)\,dt \overset{20.3.2.)}{=} \lim_{N\to\infty} \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t) F_N(x-t)\,dt. \qquad (2)$$

Wegen der Stetigkeit von f für $t = x$ können wir zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon)$ so bestimmen, dass $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ ist für $|t-x| < \delta$. Mit (1) und (2) folgt:

$$|g(x) - f(x)| \underset{(1),(2)}{=} \lim_{N\to\infty} \left| \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t) F_N(x-t)\,dt - \underbrace{\int_{-1/2}^{1/2} f(x) F_N(x-t)\,dt}_{\rightsquigarrow \text{ auf } [x-\delta,\, x+\delta],\ 20.3.2.)} \right| \underset{F_N \ge 0}{\le} \varepsilon \cdot \int_{x-\delta}^{x+\delta} F_N(x-t)\,dt \le \varepsilon \cdot \delta \cdot \frac{C}{N\delta^2} \le \varepsilon \text{ für } N \text{ groß},$$

und folglich $g(x) = f(x)$ überall. □

20.7. **Def.:** Es sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ integrierbar mit $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt<\infty$.
Dann nennt man $\hat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, $\hat{f}(n):=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e(-nt)\,dt$ die Fouriertransformierte von f.

20.8. **Satz** (Poissonsche Summenformel): Es sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ zweimal stetig differenzierbar und mit einer Konstanten $C>0$ gelte $|f(x)|+|f'(x)|+|f''(x)|\le C\cdot\frac{1}{1+x^2}$. $\boxed{*}$
Dann ist $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} f(n)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)$.

Bew.: Die Funktion $F(x):=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} f(x+k)$ besitzt offenbar die Periode 1.
Wegen der Bedingung $\boxed{*}$ konvergiert auch $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} f^{(m)}(x+k)$ gleichmäßig für $m=0,1,2$, also gegen $F(x)$, $F'(x)$, $F''(x)$.

Also ist $F(x)$ zweimal stetig diff'bar. Nach Satz 20.5, auf F angewendet, konvergiert die Fourierreihe $S_F(x,N)$ gleichmäßig gegen $F(x)$, d.h. also

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\tilde{F}(n)e(nx)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\int_0^1 F(t)e(-nt)\,dt\right)e(nx)\\
&\overset{\text{glm. Kgz.}}{=}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_0^1 f(t+k)e(-n(t+k))\,dt\right)e(nx)\\
&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_k^{k+1} f(t)e(-nt)\,dt\right)e(nx)\\
&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e(-nt)\,dt\right)e(nx)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)e(nx).
\end{aligned}
$$

Nach Einsetzen von $x=0$ folgt die Behauptung. $\square$

20.9. **Bem.:** Die Verwendung der Poissonschen Summenformel in der Form von Satz 20.8 im Beweis der Funktionalgleichung für ϑ war erlaubt,
da die Voraussetzung $|f(t)|+|f'(t)|+|f''(t)|\le C\cdot\frac{1}{1+t^2}$ $\boxed{*}$
dort mit $f(t)=e^{-t^2\pi x}$ für alle $t\in\mathbb{R}$ erfüllt ist.