Vorlesung Analytische Zahlentheorie

SoSe '22, hhu
K. Halupczok

AnZ 19: Die Funktionalgleichung von $\zeta(s)$

Stichworte: Funktionalgleichungen für die Theta- und Psi-Reihe, Formel mit Γ, ζ und ψ, vollständige Zetafunktion $\xi(s)$, Funktionalgleichung von ξ, triviale und nichttriviale Nullstellen von ζ, Symmetrie der Nullstellen

---

19.1. **Einleitung:**
Wir beweisen die weitere meromorphe Fortsetzung von ζ auf $\{s \in \mathbb{C};\ \sigma = \mathrm{Re}(s) \leq 0\}$ durch Herleitung der Funktionalgleichung von ζ. Nur bei $s=1$ hat ζ einen Pol (den schon bekannten). Neben der Γ-Fkt. benötigen wir dafür zwei weitere reelle Funktionen, die oft ψ (Psi) und ϑ (Theta) genannt werden.

19.2. **Def.:** Für $x>0$ definieren wir
die Theta-Reihe $\vartheta(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi x}$,
und die Psi-Reihe $\psi(x) := \sum_{n\geq 1} e^{-n^2\pi x} = \frac{1}{2}(\vartheta(x)-1)$.
Die Funktionen $\vartheta, \psi : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ sind wohlzuunterscheiden von den Tschebyschev-Funktionen ϑ, ψ, weshalb wir hier ein anderes Schriftbild benutzen (was in der Literatur nicht üblich ist).

19.3. **Lemma:** Die Funktionen ϑ, ψ sind beliebig oft stetig diff'bar in $]0,\infty[\subseteq \mathbb{R}$.
Die Reihe von ψ konvergiert gleichmäßig auf jedem kompakten Teilintervall von $]0,\infty[$.

Bew.: Sei $M>1$ beliebig. Für $x \in [\frac{1}{M}, M]$ gilt $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x} \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi/M}$, und ebenso $\sum_{n=1}^{\infty} n^2\pi e^{-n^2\pi x} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \pi n^2 e^{-n^2\pi/M}$, $\sum_{n=1}^{\infty} n^4\pi^2 e^{-n^2\pi x} \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^4\pi^2 e^{-n^2\pi/M}$, usw.
Da für jedes Kompaktum in $]0,\infty[$ ein solches M auffindbar ist, folgt die Beh. zur kompakten Konvergenz (d.h. gleichmäßige Konvergenz auf jedem Kompaktum).
Die Ableitungen können gliedweise durchgeführt werden, Stetigkeit/Diff'barkeit bleibt erhalten nach dem Konvergenzsatz von Weierstraß 4.5. (↪ sogar beliebig oft) $\square$

AnZ 19
- 2 -

19.4. **Lemma**: Die Fktn. ϑ, ψ erfüllen für $x>0$ die Funktionalgleichungen

$$\vartheta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\,\vartheta\left(\frac{1}{x}\right), \quad 2\psi(x)+1 = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(2\psi\left(\frac{1}{x}\right)+1\right),$$

und ψ erfüllt die Abschätzungen

$$\psi(x) \ll \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ für } x\to 0+, \quad \psi(x) \ll e^{-\pi x} \text{ für } x\to\infty.$$

Bew.: • Die ψ-F.-Glg. folgt aus der ϑ-F.-Glg.:

$$2\psi(x)+1 = \vartheta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\,\vartheta\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(2\psi\left(\frac{1}{x}\right)+1\right). \checkmark$$

• Die Absch. $\psi(x) \ll e^{-\pi x}$ für $x\to\infty$ folgt aus der Σ-Darst. von ψ:

$$\psi(x) = \sum_{n\geq 1} e^{-n^2\pi x} \leq \sum_{n\geq 1} e^{-n^2}\cdot e^{-\pi x}, \text{ da } e^{n^2\pi x} \geq e^{n^2\pi + x} = e^{\pi n^2}\cdot e^{x} \text{ für } x>2.$$

• Daraus folgt mit der ψ-F.-Glg. dann die Absch. $\psi(x) \ll \frac{1}{\sqrt{x}}$ für $x\to 0+$:

$$\psi(x) = \frac{1}{2}(2\psi(x)+1)-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\Big(\underbrace{2\psi\left(\tfrac{1}{x}\right)}_{\ll e^{-\pi/x} \ll 1}+1\Big)\right)-\frac{1}{2} \ll \frac{1}{\sqrt{x}} + O(1) \ll \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ für } x\to 0+.$$

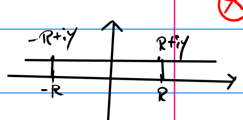
• Zur ϑ-F.-Glg.:

Aus $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = 2\int_0^{\infty} e^{-t^2}\,dt \overset{u=t^2 \to du/dt = 2t = 2\sqrt{u}}{=} 2\int_0^{\infty} e^{-u}\cdot\frac{1}{2\sqrt{u}}\,du = \int u^{-\frac{1}{2}}e^{-u}\,du = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ nach 18.7

folgt zunächst $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2\pi x}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t\sqrt{\pi x})^2}\,dt \underset{u=t\sqrt{\pi x} \to du/dt = \sqrt{\pi x}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\,du = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}\cdot\sqrt{\pi} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$

Daraus folgt wiederum durch Verschiebung des Integrationsweges $[-\infty,\infty]$ nach $[-\infty+iy, \infty+iy] := \{x+iy;\, x\in\mathbb{R}\}$ für beliebiges $y\in\mathbb{R}$, dass auch

(*) $\int_{-\infty+iy}^{\infty+iy} e^{-t^2\pi x}\,dt = \frac{1}{\sqrt{x}}$ gelten muss aufgrund des Cauchyschen Integralsatzes.



(Denn innerhalb jedes Rechtecks mit den Punkten $-R$, R, $R+iy$, $-R+iy$ ($R>0$ groß) hat $f(t)=e^{-t^2\pi x}$ keine Singularitäten, und $\int_R^{R+iy} e^{-t^2\pi x}\,dt$, $\int_{-R}^{-R+iy} e^{-t^2\pi x}\,dt$ gehen für $R\to\infty$ gegen 0:
ist mit Standardabschätzung der Integrale zu sehen.)

Wenden auf $\vartheta(x)$ die Poissonsche Σ-formel $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)$ an.

⌈Diese Formel (aus der Fourieranalysis) zeigen wir in AnZ 20.) Sie ist hier verwendbar, da $|f(t)|+|f'(t)|+|f''(t)| \le C\cdot\frac{1}{1+t^2}$ für $f(t) = e^{-t^2\pi x}$ erfüllt ist. Dabei ist $\hat{f}(n) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i n t}\,dt$ die Fouriertransformierte von f.⌋

Haben: $\hat{f}(n) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2\pi x)\exp(-2\pi i n t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2\pi x - 2\pi i n t)\,dt$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big(-\pi x\big(t+\tfrac{in}{x}\big)^2 \underbrace{-\pi\tfrac{n^2}{x}}_{\text{unabh. von } t}\Big)\,dt$$ ⌈Binomische Formel / quadratische Ergänzung⌋

$$= \int_{-\infty+in/x}^{\infty+in/x} \exp(-t^2\pi x)\,dt\cdot\exp\big(-\pi\tfrac{n^2}{x}\big) \overset{(*)}{=} \frac{1}{\sqrt{x}}\exp\big(-\pi\tfrac{n^2}{x}\big),$$

↑ Verschiebung des Integrationswegs um $iy = i\frac{n}{x}$

nach Anwenden von $\sum_{n\in\mathbb{Z}}$ zeigt die Poissonsche Summenformel also

$$\vartheta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-n^2\pi x} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\big(-\pi\tfrac{n^2}{x}\big) = \frac{1}{\sqrt{x}}\,\vartheta\big(\tfrac{1}{x}\big).$$

□

19.5. Lemma: Für $\sigma > 1$ gilt $\pi^{-s/2}\,\Gamma\big(\frac{s}{2}\big)\zeta(s) = \int_0^\infty \psi(x)\, x^{s/2-1}\,dx$.

Bew.: • Für $M > 1$ ist $\int_{1/M}^{M} \psi(x)\, x^{s/2-1}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{1/M}^{M} x^{s/2-1} e^{-n^2\pi x}\,dx$. (*)

Aus den Schranken in 19.4 für $x\to 0+$, $x\to\infty$ folgt:

$$\lim_{M\to\infty}\int_{1/M}^{M} x^{s/2-1}\psi(x)\,dx = \int_0^\infty x^{s/2-1}\psi(x)\,dx.$$ ⌈$\psi(x) \ll \frac{1}{x}$, $x\to 0+$; $\psi(x) \ll e^{-\pi x}$, $x\to\infty$⌋

• Jetzt Grenzübergang der r.S. von (*):

Sei $\delta = \delta(\sigma) > 0$ mit $\frac{1}{2}\sigma(2-\delta) > 1$. ⌈$1 > 1-\frac{\delta}{2} > \frac{1}{\sigma}$, da $\sigma > 1$. ⌋ ⇝ δ hängt von σ ab

1.) Es sei $n \le M^{\frac{1}{2-\delta}}$.

Wegen $\int_0^{1/M} \underbrace{e^{-n^2\pi x}}_{\le e^0 = 1} x^{s/2-1}\,dx \ll \int_0^{1/M} x^{\sigma/2-1}\,dx = \frac{t^{\sigma/2}}{\sigma/2}\Big|_0^{1/M} = O_\sigma(M^{-\sigma/2})$,

ist dann $\sum_{n\le M^{1/(2-\delta)}} \Big|\int_0^{1/M}\dots\Big| = O_\sigma\big(M^{\frac{1}{2-\delta}-\sigma/2}\big)$, d.h. $\xrightarrow[M\to\infty]{} 0$ da $\frac{1}{2-\delta} - \frac{\sigma}{2} < 0$.

$(\Leftrightarrow \sigma > \frac{2}{2-\delta}$ ✓$)$

2) Für $n > M^{1/(2-\delta)}$ ist $\left|\int_0^{1/M} e^{-n^2\pi x} x^{s/2-1}\,dx\right| \leq \underbrace{\int_0^{n^{-(2-\delta)}} \underbrace{e^{-n^2\pi x}}_{\leq e^0 = 1} x^{\sigma/2-1}\,dx}_{\leq \frac{t^{\sigma/2}}{\sigma/2}\Big|_0^{n^{-(2-\delta)}}} + \int_{n^{-(2-\delta)}}^{1/M} e^{-n^2\pi x} \underbrace{x^{\sigma/2-1}}_{\ll M^{-\sigma/2+1}}\,dx$

$x \geq n^{-2+\delta}$; ↳ Intervallg. $\leq \frac{1}{M}$

$$= O_\sigma\left(n^{-\sigma(2-\delta)/2}\right) + O_\sigma\left(\exp(-\overbrace{n^\delta}^{\geq 1})M^{-\sigma/2}\right),$$

also $\underline{\underline{\sum_{n>M^{1/(2-\delta)}}}} \left|\int_0^{1/M}\cdots\right| \xrightarrow{M\to\infty} 0$. Weiter $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\int_M^\infty\cdots\right| = O_\sigma\left(M^{\sigma/2} e^{-\pi M}\right) \xrightarrow{M\to\infty} 0$.

von $\frac{t^{\sigma/2}}{\sigma/2}$ mit $t = M$; o.S. für $e^{-n^2\pi x}$

• Zusammenfassung:

$$\lim_{M\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{1/M}^{M} x^{s/2-1} e^{-n^2\pi x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\infty x^{s/2-1} e^{-n^2\pi x}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^\infty \left(\frac{t}{n^2\pi}\right)^{s/2-1} e^{-t}\,dt = \pi^{-s/2}\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}}_{\zeta(s)} \underbrace{\int_0^\infty e^{-t}t^{s/2-1}\,dt}_{\Gamma(s/2).} = \pi^{-s/2}\,\Gamma\left(\tfrac{s}{2}\right)\zeta(s).$$

$t = n^2\pi x \rightsquigarrow \frac{dt}{dx} = \pi n^2$ □

19.6 **Satz** (Funktionalgl. der Riemannschen Zetafunktion):
Die Fkt. ζ besitzt eine merom. Forts. in $\mathbb{C}$ mit einem einzigen Pol bei $s=1$ der Ordnung 1 vom Residuum 1. Die vollständige Zetafunktion $\xi(s) := \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-s/2}\zeta(s)$ erfüllt die Funktionalgleichung $\xi(s) = \xi(1-s)$, $s \in \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$. Dabei ist $\zeta(s) \neq 0$ für $\sigma < 0$ und $\sigma > 1$.

19.7 **Kor.:** Die Funktion ζ hat keine Nullstellen in $\sigma > 1$, und in $\sigma < 0$ genau die trivialen Nullstellen $-2, -4, -6, \ldots$ Für die nichttrivialen Nullstellen im kritischen Streifen $0 \leq \sigma \leq 1$ gilt: $\zeta(s) = 0 \iff \zeta(1-s) = 0$.

19.8 **Bem.:** • Es gilt $\zeta(s) = 0 \iff \overline{\zeta(s)} = 0 \iff \zeta(\bar{s}) = 0$ im kritischen Streifen, wie man der Formel 10.2 für die Fortsetzung von ζ dort entnehmen kann.
Diese Symmetrie zeigt (mit 19.7), dass jede nichttriv. Nst. $\rho = \beta + i\gamma$ mit $\beta \neq \frac{1}{2}$, $\gamma \neq 0$, gleich ein Quadrupel $\rho, \bar\rho, 1-\rho, 1-\bar\rho$ von Nullstellen implizieren würde.
• Auf $0 < s < 1$ (d.h. auf der reellen Achse mit $s = \sigma \in \mathbb{R}$ und $0 < \sigma < 1$ mit $\gamma = 0$) hat ζ keine Nullstellen. [ohne Beweis]

Bew. des Satzes 19.6:

Lemmas 19.4 und 19.5 zeigen für $\sigma > 1$:

$$\xi(s) = \Gamma\left(\tfrac{s}{2}\right)\pi^{-s/2}\zeta(s) \underset{19.5}{=} \int_0^\infty x^{s/2-1}\psi(x)\,dx = \int_0^1 + \int_1^\infty = \underbrace{\int_0^1 x^{s/2-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\psi\left(\tfrac{1}{x}\right) + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\right)dx}_{\text{da } 2\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(2\psi\left(\frac{1}{x}\right)+1\right)-1 \text{ nach } 19.4} + \int_1^\infty \cdots$$

$$= \underbrace{\int_0^1 x^{s/2-1}\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\right)dx}_{\frac{1}{2}\frac{t^{s/2-1/2}}{s/2-1/2}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\frac{t^{s/2}}{s/2}\Big|_0^1 = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}} + \int_0^1 x^{s/2-3/2}\psi\left(\tfrac{1}{x}\right)dx + \int_1^\infty x^{s/2-1}\psi(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_0^1 \underbrace{x^{s/2-3/2}\psi\left(\tfrac{1}{x}\right)dx}_{t = \frac{1}{x} \rightsquigarrow \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{x^2} \rightsquigarrow x^{-3/2+2} = x^{1/2} = t^{-1/2},\ \text{weiter } -\int_\infty^1 = \int_1^\infty} + \int_1^\infty x^{s/2-1}\psi(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \left(x^{-s/2-1/2} + x^{s/2-1}\right)\underbrace{\psi(x)}_{\ll e^{-\pi x} \text{ nach } 19.4}dx.$$

Daher ist $I_N(s) := \int_1^N \left(x^{-s/2-1/2} + x^{s/2-1}\right)\psi(x)\,dx$ kompakt konvergent,

d.h. $\int_1^\infty \left(x^{-s/2-1/2} + x^{s/2-1}\right)\psi(x)\,dx$ ist auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion.

Unter Berücksichtigung von $\frac{1}{s(s-1)}$ folgt: ξ ist holomorph auf $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$.

- Weiter ist $\xi(s) = \xi(1-s)$ wegen der obigen Darstellung von $\xi(s)$: Wird damit $\xi(1-s)$ berechnet, erhält man wegen $\frac{1}{(1-s)((1-s)-1)} = \frac{1}{s(s-1)}$ und $x^{-(1-s)/2-1/2} + x^{(1-s)/2-1} = x^{s/2-1} + x^{-s/2-1/2}$ genau wieder den Ausdruck für $\xi(s)$.
- Mit $\xi(s) \neq 0$ für $\sigma > 1$, aufgrund der Def. von ξ, folgt $\xi(s) \neq 0$ für $\sigma < 0$. $\square$

Beweis von Kor. 19.7:

- Wegen $\xi(s) = \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-s/2}\zeta(s)$, $\xi(1-s) = \xi(s)$ und der bekannten Nullstellenfreiheit von ζ in $\sigma > 1$ können in $\sigma < 0$ nur noch dann Nullstellen von ζ vorkommen, wenn $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ dort einen Pol hat. Diese liegen nach 18.3(2) genau bei $\frac{s}{2} = -1, -2, -3, \ldots$
- Der Fall $s=0$ wird separat behandelt: Für s nahe 0 ist $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\underbrace{\pi^{-s/2}}_{\to 1}\zeta(s) = \underbrace{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}_{\to\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\underbrace{\pi^{-(1-s)/2}}_{\to\pi^{-1/2}}\zeta(1-s)$,

also $\zeta(0) = \pi^{-1/2}\underbrace{\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)}_{=\sqrt{\pi} \text{ nach } 18.7}\lim_{s\to 0}\frac{\zeta(1-s)}{\Gamma(s/2)} = \lim_{s\to 0}\frac{\frac{1}{(1-s)-1} + H(s)}{\Gamma(1+s/2)/s/2}$ (Pol von ζ bei 1)

$$= \lim_{s\to 0}\frac{s}{2}\left(\frac{-1/s}{\Gamma(1+s/2)} + \ldots\right) = -\frac{1}{2},$$

was ζ in $s=0$ holomorph fortsetzt (beachten $\Gamma(1)=1$). $\square$