Vorlesung Analytische Zahlentheorie

SoSe'22, hhu
K. Halupczok

AnZ 18: Die Gammafunktion

Stichworte: Gammafunktion Γ auf $\mathbb{C}$, einfache Pole bei $-n$ für $n \in \mathbb{N}_0$, Funktionalgleichung von Γ, Funktionalgleichung mit komplexem Sinus

18.1. Einleitung:
Wir behandeln ab jetzt die weitere meromorphe Fortsetzung von ζ auf ganz $\mathbb{C}$. Dazu benötigen wir die Gammafunktion, welche eine meromorphe Fortsetzung der Fakultätsfunktion $f(n+1) = n!$ darstellt. Die wesentliche Theorie zur Gammafunktion wird hier vorgestellt und ist u.a. schon aus Funktionentheorie oder anderen Vorlesungen bekannt.

18.2. Def.: Die Gammafunktion Γ ist über $\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$ mit $t^{z-1} := \exp((z-1)\log(t))$ definiert.

18.3. Satz: (1) Die Funktion $\Gamma(z)$ ist damit für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(z) > 0$ definiert und auf $\mathbb{C}$ meromorph fortsetzbar.

(2) Sie hat Pole genau in $\{-n;\ n \in \mathbb{N}_0\}$, welche Pole erster Ordnung sind, und wo $\operatorname{Res}_{-n}(\Gamma) = \frac{(-1)^n}{n!}$ das Residuum bei $-n \in \mathbb{Z}$ ist.

(3) Die Funktion $\Gamma(z)$ erfüllt die Funktionalgleichung
$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z),$$
so dass sich $\Gamma(n+1) = n!$ für $n \in \mathbb{N}_0$ ergibt.

18.4. Bem.: • Somit ist Γ eine holomorphe Fortsetzung der Fakultätsfunktion $(n-1)!$ auf $\mathbb{C} \setminus \{-n;\ n \in \mathbb{N}_0\}$.

• Die Gammafunktion spielt eine besondere Rolle bei der Herleitung der Stirlingschen Formel $n! = \sqrt{2\pi n}\,\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^{\theta(n)/12n}$ für ein $\theta(n) \in\,]0,1[$.
Für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ lautet diese $\Gamma(z) = \sqrt{2\pi} \cdot z^{z-1/2} e^{-z+\mu(z)}$ mit $\mu(z) = o(z)$ für $z \to \infty$ in Winkelräumen …

18.5. Bew. von 18.3:

- Betrachte $I_n(z) := \int_{1/n}^{n} t^{z-1} e^{-t}\,dt$, die Folge $(I_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ ist für $\mathrm{Re}(z)>0$ kompakt konvergent, d.h. die Folge konvergiert gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge in $\{\mathrm{Re}(z)>0\}$. ⌈Ist K so ein Kompaktum mit $0<\mathrm{Re}(z)\leq r+1$ für alle $z\in K$, $\exists\, r>0$, so gilt $\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall m\geq n\geq n_0$: $|I_m(z)-I_n(z)|\leq\left(\int_{1/m}^{1/n}+\int_{n}^{m}\right)t^{\overset{\leq r}{\mathrm{Re}(z)-1}}e^{-t}\,dt$, und da $\frac{t^r}{e^t}\leq e^{-t/2}$ für große t, ist $\int_n^m \frac{t^r}{e^t}dt \leq \int_n^m e^{-t/2}dt \leq \varepsilon$ für große $n_0(\varepsilon)$ wegen der Konvergenz von $\int^{\infty} e^{-t/2}dt$, und da $\frac{t^r}{e^t}\leq e^{-t/2}$ auch für t nahe 0 ist, gilt dies auch für $\int_{1/m}^{1/n}\cdots$ wegen der Existenz von $\int_0 e^{-t/2}dt$.⌋

Die Folge $(I_n(z))_n$ hat für $\mathrm{Re}(z)>0$ somit eine holomorphe Grenzfunktion (nach dem Weierstraßschen Konvergenzsatz), genannt Γ.

- Für $\mathrm{Re}(z)>0$ ist weiter
$$\Gamma(z+1)=\int_0^\infty \underset{u}{t^z}\, \underset{v'}{e^{-t}}\,dt \underset{\text{part. }\int}{=} \underbrace{\left[-t^z e^{-t}\right]_0^\infty}_{=0} + z\underbrace{\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt}_{=\Gamma(z)} = z\,\Gamma(z),$$
d.h. die Funktionalgleichung gilt dort.

- Induktion zeigt nun (mit der Funktionalgleichung im Bereich positiver Realteile angewendet), dass
$$(*)\quad \Gamma(z)=\underbrace{\frac{\Gamma(z+m+1)}{z(z+1)\cdots(z+m)}}_{\text{merom. für } \mathrm{Re}(z)>-(m+1),}$$
dort holomorph bis auf Nst. $\{0,-1,-2,\dots\}$ des Nenners $\rightsquigarrow$ Pole erster Ordnung

Da $m\in\mathbb{N}_0$ beliebig war, folgt so die meromorphe Fortsetzbarkeit auf $\mathbb{C}$.
Da die Fortsetzung mit (*) über die Funktionalgleichung geht, folgt die Gültigkeit der Funktionalgleichung auf den gesamten Definitionsbereich $\mathbb{C}\setminus\{-n,\, n\in\mathbb{N}_0\}$.

- Mit $\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-t}dt=1$ folgt $\Gamma(n+1)=n!$ für $n\in\mathbb{N}_0$ induktiv aus der Funktionalgleichung.

- Die Stellen $-m$ mit $m\in\mathbb{N}_0$ sind offenbar Pole 1. Ordnung, ablesbar an (*).
Ihr Residuum beträgt
$$\mathrm{Res}_{-m}(\Gamma)=\lim_{z\to -m}(z+m)\cdot\frac{\Gamma(z+m+1)}{z(z+1)\cdots(z+m)}=\frac{\Gamma(1)}{(-m)(-m+1)\cdots(-m+m-1)}=\frac{(-1)^m}{m!}.\quad\square$$

18.6. Weitere Eigenschaften der Gammafunktion:

(1) Γ ist die einzige logarithmisch konvexe Funktion, die die Funktionalglg. von Γ auf $\mathbb{R}_{>0}$ fortsetzt (Satz von Bohr–Mollerup, ohne Beweis).

⌜logarithmisch konvex :⟺ $\log(\Gamma)$ konvex⌟

(2) Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ gilt die Gleichung $\boxed{\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}}$.
Also hat Γ keine Nullstellen.

Bew.: • Für $\mathrm{Re}(z)>0$ ist $|\Gamma(z)| \le \int_0^\infty |t^{z-1}| e^{-t}\,dt = \int_0^\infty t^{\mathrm{Re}(z)-1} e^{-t}\,dt = \Gamma(\mathrm{Re}(z))$,
unter Verwendung von (*) ist Γ also auf jeder Menge
$\{z \in \mathbb{C};\ a \le \mathrm{Re}(z) \le b,\ \underbrace{|\mathrm{Im}(z)| \ge 1}_{\to z \text{ ist dort genug weit weg von den Polen der reellen Achse}}\}$ beschränkt.

• Betrachte $f(z) := \Gamma(z)\Gamma(1-z) - \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ auf $V := \{z \in \mathbb{C};\ 0 \le \mathrm{Re}(z) \le 2\}$,
so dass also f beschränkt ist auf $V \cap \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}(z) \ge 1\}$,
und ebenso auf $V \cap \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}(z) \le -1\}$.

• Die einzigen denkbaren Pole in V hat f in $z = 0, 1, 2$. Diese heben sich aber weg:
In $z=0$ hat Γ das Residuum $\frac{(-1)^0}{0!} = 1$, also auch $\Gamma(z)\Gamma(1-z)$ wegen $\Gamma(1)=1$.
Und in $z=0$ ist 1 auch das Residuum von $\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$, da $\lim_{z\to 0} z \cdot \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \overset{\text{de l'H}}{=} \lim_{z \to 0} \frac{\pi}{\pi \cos(\pi z)} = 1$.
(Analog in $z=1$ und $z=2$.) Somit ist f in V eine holomorphe Funktion.

• Da f in dem Bereich $V \cap \{|\mathrm{Im}(z)| \le 1\}$ kompakt ist, folgt insgesamt, dass f in V beschränkt ist.

• Nun hat f die Periode 2, d.h. $f(z+2) = f(z)$ für $z \in V$, ablesbar an der Def. von f.
Damit lässt sich die Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ periodisch fortsetzen zu einer auf $\mathbb{C}$ holomorphen Funktion, die auf $\mathbb{C}$ beschränkt ist.

• Nach dem Satz von Liouville ist also f eine konstante Funktion.
Fragt sich noch, welche Konstante. Da aber $f(-z) = -f(z)$, ist $f \equiv 0$.
⌜Denn für $z \in [0,1[$ ist $\Gamma(-z)\Gamma(1+z) = \frac{\Gamma(-z+1)}{-z} \cdot z\Gamma(z) = -\Gamma(z)\Gamma(1-z)$, und $\sin(\pi(-z)) = -\sin(\pi z)$.⌟ □

18.7. Kor.: $\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Bew.: Nach 18.6.(2) ist $\Gamma^2(\tfrac{1}{2}) = \Gamma(\tfrac{1}{2}) \cdot \Gamma(1-\tfrac{1}{2}) = \frac{\pi}{\sin(\pi/2)} = \pi$. □