Vorlesung Analytische Zahlentheorie

SoSe'22, hhu
K. Halupczok

AnZ 17: Mittelwert der Teileranzahlfunktion

Stichworte: Euler-Mascheroni-Konstante, Asymptotik für den Mittelwert der Teileranzahlfunktion, Dirichletsche Hyperbelmethode, Dirichletsches Teilerproblem

---

17.1. **Einleitung:** Wir zeigen eine asymptotische Formel für den Mittelwert $\frac{1}{x}\sum_{n\le x}\tau(n)$ der Teileranzahlfunktion $\tau(n)=\sum_{d|n}1$ mit Hilfe der Dirichletschen Hyperbelmethode. Diese wurde zur Herleitung des PZSes aus der Formel $M(x)=o(x)$ in 16.8.2.) benutzt.

17.2. **Satz/Def.:** Für die harmonische Reihe gilt die Asymptotik $\sum_{n\le x}\frac{1}{n}=\log(x)+\gamma+O(\frac{1}{x})$, $x\to\infty$, für ein $\gamma\in\mathbb{R}$. Der Grenzwert $\gamma:=\lim_{x\to\infty}\left(\sum_{n\le x}\frac{1}{n}-\log(x)\right)$ existiert also und wird Euler-Mascheroni-Konstante genannt. Es ist $\gamma=0.5772\ldots$

Bew.: Haben $\sum_{n\le x}\frac{1}{n}\underset{\text{p.}\Sigma:\ a_n=1,\ f(t)=\frac{1}{t}}{=}\frac{x-\{x\}}{x}+\int_1^x\frac{t-\{t\}}{t^2}\,dt=1+O(\frac{1}{x})+\log(x)-\underbrace{\int_1^x\frac{\{t\}}{t^2}\,dt}_{\text{Kgt. für } x\to\infty \text{ nach Majorantenkriterium}}$, wo $\{x\}:=x-\lfloor x\rfloor$.

Für alle $x\ge 1$ lässt sich $\int_x^\infty\frac{\{t\}}{t^2}\,dt$ im Betrag abschätzen durch $\int_x^\infty\frac{dt}{t^2}=\frac{1}{x}$, da $\{x\}\in[0,1[$. Setzt man also $\gamma:=1-\int_1^\infty\frac{\{t\}}{t^2}\,dt$, so ergibt sich die Behauptung. □

17.3. **Satz:** Für $x\to\infty$ gilt die Asymptotik $\sum_{n\le x}\tau(n)=x\log(x)+(2\gamma-1)x+O(x^{1/2})$.

17.4. **Bem.:** Auf direktem Weg kann sofort die folgende schwächere Asymptotik hergeleitet werden:

$$\sum_{n\le x}\tau(n)=\sum_{n\le x}\sum_{d|n}1=\sum_{d\le x}\sum_{\substack{n\le x\\ d|n}}1=\sum_{d\le x}\sum_{\substack{n=k\cdot d\le x\\ \text{für } k\in\mathbb{N}}}1=\sum_{d\le x}\sum_{k\le\frac{x}{d}}1$$

$$=\sum_{d\le x}\left\lfloor\frac{x}{d}\right\rfloor=\sum_{d\le x}\left(\frac{x}{d}+O(1)\right)=x\cdot\sum_{d\le x}\frac{1}{d}+O(x)\underset{17.2}{=}x\cdot\Big(\log(x)+\underbrace{\gamma+O(\tfrac{1}{x})}_{=O(1)\text{, reicht hier auch schon}}\Big)+\overbrace{O(x)}^{\text{dominant}}$$

$$=x\log(x)+O(x).$$

Wir müssen zum Beweis von 17.3 also genauer vorgehen. (Vgl. Ü Bl.3 A1b))

17.5 Beweis von 17.3: Ist $n\in\mathbb{N}$ keine Quadratzahl, so ist für $d\in\mathbb{N}$ mit $d|n$ eine der Zahlen d und $\frac{n}{d}$ kleiner als $n^{1/2}=\sqrt{n}$ und die andere größer. Diese Beobachtung liefert für alle $n\in\mathbb{N}$, dass

$$\tau(n)=\sum_{d|n}1=\sum_{\substack{d|n\\ d\le n^{1/2}}}1+\underbrace{\sum_{\substack{d|n\\ \frac{n}{d}<n^{1/2}\iff n^{1/2}<d}}1}_{\text{zählt die Teiler }>n^{1/2}\text{, d.h. die "Gegen"-Teiler }<n^{1/2}}=2\cdot\sum_{\substack{d|n\\ d<n^{1/2}}}1+\begin{cases}0, & \text{falls } n \text{ keine } \square\text{zahl},\\ 1, & \text{sonst (für } d=n^{1/2}).\end{cases}$$

Es folgt
$$\sum_{n\le x}\tau(n)=2\sum_{n\le x}\sum_{\substack{d|n\\ d<n^{1/2}}}1+\underbrace{\sum_{n\le x}q(n)}_{\#\text{ der }\square\text{e bis }x\,=\,O(x^{1/2})}\quad\text{mit } q(n):=\begin{cases}1, & n\ \square\text{zahl},\\ 0, & \text{sonst},\end{cases}$$

$$=2\sum_{d<x^{1/2}}\sum_{\substack{n>d^2\\ n\le x,\, d|n}}1+O(x^{1/2})=2\sum_{d\le x^{1/2}}\sum_{k=d+1}^{\lfloor x/d\rfloor}1+O(x^{1/2})$$

$n\le x, d|n \rightsquigarrow k:=\frac{n}{d}$, dann ist $d^2<n\le x \iff d<k\le\frac{x}{d}$

$$=2\sum_{d<x^{1/2}}\left(\left\lfloor\frac{x}{d}\right\rfloor-d\right)+O(x^{1/2})=2\sum_{\substack{d\le x^{1/2}\\ \uparrow ⚠}}\underbrace{\left(\overbrace{\left\lfloor\frac{x}{d}\right\rfloor}^{=\frac{x}{d}+O(1)}-d\right)}_{=0\text{ für } d=x^{1/2}\text{, falls } x \text{ eine } \square\text{zahl}}+O(x^{1/2})$$

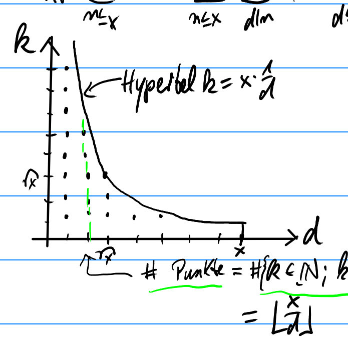
$$=2x\sum_{d\le x^{1/2}}\frac{1}{d}+O(x^{1/2})-2\underbrace{\sum_{d\le x^{1/2}}d}_{=\frac{\lfloor x^{1/2}\rfloor\cdot(\lfloor x^{1/2}\rfloor+1)}{2}\text{ laut kleinem Gauß}}+O(x^{1/2})$$

$$\overset{17.2}{=}2x\left(\log(x^{1/2})+\gamma+O(x^{-1/2})\right)-2\cdot\underbrace{\frac{\lfloor x^{1/2}\rfloor\cdot(\lfloor x^{1/2}\rfloor+1)}{2}}_{=x+O(x^{1/2})}+O(x^{1/2})$$

$$=x\cdot(\log(x)+2\gamma-1)+O(x^{1/2}).\qquad\square$$

17.6 Bem: 1.) Die im Beweis verwendete Methode, die zu zählenden Teiler gemäß ihrer Größe zu sortieren, kann wie folgt visualisiert werden und heißt deswegen Dirichletsche Hyperbelmethode:

Mit $\sum_{n\le x}\tau(n)=\sum_{n\le x}\sum_{d|n}1=\sum_{d\le x}\sum_{\substack{n\le x\\ d|n}}1=\sum_{d\le x}\left\lfloor\frac{x}{d}\right\rfloor$ zählt man für jedes $d\in\mathbb{N}$ mit $d\le x$ die Anzahl der $k\in\mathbb{N}$ mit $k\le\frac{x}{d}$, also die Gitterpunkte $(d,k)\in\mathbb{N}^2$ mit $dk\le x$, d.h. genau die Gitterpunkte unterhalb der Hyperbel mit der Gl. $dk=x \iff k=x\cdot\frac{1}{d}$. Man kann auch die Gitterpunkte im Quadrat $[1,\sqrt{x}]^2\subseteq\mathbb{R}^2$ plus 2 mal der Gitterpunkte in $[\sqrt{x},x]\times[1,\sqrt{x}]$ unterhalb der Hyperbel zählen, geht genauso.



2) Der Fehlerterm $O(x^{1/2})$ kann weiter verbessert werden, Rekord heute: $O(x^{131/416})$ von [M. Huxley, 2003].
Landau zeigte im Jahr 1916, dass dieser Term nicht zu $O(x^{1/4})$ verbessert werden kann.
Die Verbesserung des Fehlerterms ist als Dirichletsches Teilerproblem bekannt.