Vorlesung Analytische Zahlentheorie

SoSe '22, hhu
K. Halupczok

AnZ 16: Beweis des Primzahlsatzes, für μ

Stichworte: Mertensfunktion M, Existenz von $\sum_{n\geq 1}\frac{\mu(n)}{n}$ bzw. $\lim_{x\to\infty}\frac{M(x)}{x}$ ist äquivalent zum PZS, diese GWe sind $=0$, Newmanscher Taubersatz für Dirichletreihen zeigt die Kgz. von $\sum_{n\geq 1}\frac{\mu(n)}{n}$, Beweis von $M(x)=o(x)\Rightarrow$ PZS in der Form $\psi(x)\sim x$

16.1. **Einleitung:** Der Newmansche Taubersatz für Dirichletreihen statt Laplace-transformierten kann für $\sum_{n\geq 1}\frac{\mu(n)}{n^s}$ angewendet werden, um $\sum_{n\leq x}\mu(n)=o(x)$ zu beweisen.
Wir zeigen, dass $\sum_{n\leq x}\mu(n)=o(x)\Leftrightarrow\sum_{n\geq 1}\frac{\mu(n)}{n}$ kgt. gilt, und der PZS daraus hergeleitet werden kann.
Allerdings wird dabei im Beweis noch die Asymptotik
$$\sum_{n\leq x}\tau(n)=x\log(x)+(2\gamma-1)x+O(x^{1/2}),\quad \text{vgl. } 2.14,$$
zur Teileranzahlfkt. $\tau(n)=\sum_{d\mid n}1$ benötigt, was wir in AnZ 17 als Satz 17.3 nachholen.

16.2. Def.: Die Funktion $M(x):=\sum_{n\leq x}\mu(n)$, d.h. die summatorische Fkt. von μ, heißt **Mertens-Funktion M**.

16.3. Bem.: • Diese Fkt. ist nicht monoton wie $\psi(x):=\sum_{n\leq x}\underbrace{\Lambda(n)}_{\geq 0}$, weil die Möbius-Fkt. μ das Vorzeichen ständig wechselt. Die Monotonie von $\psi(x)$ war im Beweis des PZSes in 15.2.4.) aus der Existenz des Laplace-Integrals $\int_0^\infty(\psi(e^t)e^{-t}-1)\,dt$ benutzt worden. Das geht mit $M(x)$ nicht unmittelbar. Wir können mit dem Newmanschen Taubersatz 14.13 für Laplace-Transformierte auf direktem Weg folgendes damit zeigen:

16.4. Satz: Es gilt: $\sum_{n\geq 1}\frac{\mu(n)}{n}$ kgt. $\Leftrightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}M(x)$ existiert. In diesem Fall sind beide GWe gleich (und zwar $=0$).

Bew.: 1.) Es ist $h(s):=(s-1)\cdot\zeta(s)$ in $\sigma>1$ holomorph und ohne Nullstelle auf $\sigma\geq 1$ wegen 9.2 und 13.2.
In $s=1$ ist $h(s)=(s-1)\cdot\zeta(s)$ durch 1 holomorph fortsetzbar (und damit in $\{\sigma\geq 1\}$),
$$\text{da } (s-1)\cdot\zeta(s)\underset{10.2}{=}(s-1)\cdot\left(\frac{1}{s-1}+\frac{1}{2}-s\int_1^\infty P_1(t)t^{-s-1}\,dt\right)\xrightarrow[s\to 1+]{}1.$$
Es folgt, dass $\frac{1}{\zeta(s)}=\frac{s-1}{h(s)}\xrightarrow{s\to 1}0$, was $\frac{1}{\zeta(s)}$ auf $\{\sigma\geq 1\}$ holomorph fortsetzt.

2.) Für $N \in \mathbb{N}$ gilt mit partieller Summation: $\sum_{n \leq N} \underbrace{\mu(n) n^{-s}}_{a_n = \mu(n),\, f(t) = t^{-s}} = M(N) N^{-s} + s \int_1^N M(u) u^{-s-1} du$, wo $\sigma > 1$.

Wegen der trivialen Abschätzung $M(N) = O(N)$ konvergiert $M(N) N^{-s}$ für $\sigma > 1$ bei $N \to \infty$ gegen 0. Die l.S. konvergiert gegen $\frac{1}{\zeta(s)}$. Das $\int$ Kgt. gegen die Laplace Transformierte von $f(t) = M(e^t)$, also $\int_0^\infty M(e^t) e^{-ts} dt$.

Mit $z := s-1$ folgt hieraus $\frac{1}{z+1} \cdot \frac{1}{\zeta(z+1)} = \int_0^\infty \frac{M(e^t)}{e^t} \cdot e^{-tz} dt$ für $Re(z) > 0$. Dabei ist $\frac{1}{\zeta(z+1)} \xrightarrow{z \to 0+} 0$.

3.) Die Tauberbedingung des Newmanschen Taubersatzes 14.13 ist erfüllt:
Denn die Fkt. $\frac{1}{z+1} \cdot \frac{1}{\zeta(z+1)}$ ist holomorph fortsetzbar in ein Gebiet, das $\{Re(z) = 0\}$ umfasst, und die Fkt. $f(t) = \frac{M(e^t)}{e^t}$ ist wegen $M(e^t) = O(e^t)$ stets beschränkt/integrierbar.
Nach Anwendung von 14.13 ist also

das Integral $\underline{\int_0^\infty \frac{M(e^t)}{e^t} dt}$ konvergent, und zwar gegen 0 wegen 2.).

Wir haben also
$$0 = \int_0^\infty \frac{M(e^t)}{e^t} dt \underset{u = e^t \leadsto du = u\,dt}{=} \int_1^\infty \frac{M(u)}{u} \cdot \frac{du}{u} = \int_1^\infty M(u) \frac{du}{u^2}$$
$$= \lim_{x \to \infty} \int_1^x \sum_{n \leq u} \mu(n) \frac{du}{u^2} = \lim_{x \to \infty} \sum_{n \leq x} \mu(n) \int_n^x \frac{du}{u^2} = \lim_{x \to \infty} \left(\sum_{n \leq x} \mu(n) \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x} \right) \right)$$
$$= \lim_{x \to \infty} \left(\sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} - \frac{1}{x} M(x) \right),$$ woraus die Beh. folgt. □

16.5 Bem.: • Satz 16.4 kann auch elementar gezeigt werden.

• Die Aussage, dass einer der beiden Grenzwerte in 16.4 existiert, impliziert den PZS, wie wir später in 16.8 zeigen. Dies eröffnet neue Einsichten: es genügt, etwa nur die Konvergenz von $\sum_{n \geq 1} \frac{\mu(n)}{n}$ zu beweisen, um den PZS zu beweisen.

• Die beiden GWe in 16.4 sind beide $= 0$, da $\sum_{n \geq 1} \frac{\mu(n)}{n} = \lim_{s \to 1+} \frac{1}{\zeta(s)} = 0$ gilt laut 16.4. 1.).

• Über Umwege kann der Newmansche Taubersatz zu einem Beweis davon benützt werden [o. Bew.].

• Es gibt eine Version des Newmanschen Taubersatzes (im Prinzip die Originalversion) für Dirichletreihen, aus der die Kgz. rasch folgt. Wir zitieren hier diesen Satz nur, der Beweis ist z.B. bei [deKoninck/Luca, S. 63-65] ausgeführt; er ist sehr ähnlich wie der Beweis von 14.13, benötigt aber zusätzlich etwas aufwendigere Reihenrestabschätzungen.

16.6. Satz (Newmanscher Taubersatz für Dirichletreihen, Originalversion): Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ mit $|a_n| \leq 1$ für alle $n\in\mathbb{N}$ (Tauberbedingung). Die Dirichletreihe $\sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$ konvergiere gegen eine Fkt. $F(s)$, die auf $\{\sigma > 1\}$ holomorph ist. Die Fkt. $F(s)$ sei holomorph fortsetzbar in eine offene Menge, die $\{\sigma \geq 1\}$ enthält. Dann konvergiert $\sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$ für alle $s\in\mathbb{C}$ mit $\sigma \geq 1$. [ohne Beweis]

16.7. Kor.: Aus 16.6 folgt, dass $\sum_{n\geq 1} \frac{\mu(n)}{n}$ konvergiert (der Wert ist dann $=0$ nach 16.5).
Bew.: $\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n\geq 1} \frac{\mu(n)}{n^s}$ für $\sigma > 1$ kann in $\sigma \geq 1$ holomorph fortgesetzt werden, wie in 16.4 1.) beschrieben. Die Tauberbedingung ist auch erfüllt. Nach 16.6 konvergiert insbesondere $\sum_{n\geq 1} \frac{\mu(n)}{n}$. □

Nun der Beweis, dass daraus (in der laut 16.4 äquivalenten Form $M(x) = o(x)$) der PZS folgt:
16.8. Satz: Aus $M(x) = o(x)$ für $x\to\infty$ folgt $\psi(x) = x\cdot(1+o(1))$, d.h. der PZS.
Bew.: 1.) Sei $F(x) = \sum_{n\leq x} \left(\psi(\tfrac{x}{n}) - \lfloor\tfrac{x}{n}\rfloor + 2\gamma\right)$, wo $\gamma := \lim_{x\to\infty}\left(\sum_{n\leq x}\frac{1}{n} - \log(x)\right) = 0.5772\ldots$ die Euler-Mascheroni-Konstante ist.
Laut Möbiusscher Umkehrformel 2.11. 2.) ist $\psi(x) - \lfloor x\rfloor + 2\gamma = \sum_{n\leq x} \mu(n)\cdot F(\tfrac{x}{n})$ und daher gen. z.z., dass dies $= o(x)$ für $x\to\infty$ ist.

2.) Dafür schätzen wir $F(x)$ ab: Wir haben $F(x) = \sum_{n\leq x}\psi(\tfrac{x}{n}) - \sum_{n\leq x}\lfloor\tfrac{x}{n}\rfloor + 2\gamma\lfloor x\rfloor$,

und darin ist: $\sum_{n\leq x}\psi\left(\tfrac{x}{n}\right) = \sum_{n\leq x}\sum_{m\leq x/n}\Lambda(m) = \sum_{m\leq x}\Lambda(m)\sum_{n\leq x/m} 1$

$$= \sum_{m\leq x}\Lambda(m)\left\lfloor\tfrac{x}{m}\right\rfloor = x\log(x) - x + O(\log(x)) \text{ nach Lemma 11.14.}$$

Weiter ist:
$$\sum_{n\leq x}\left\lfloor\tfrac{x}{n}\right\rfloor = \sum_{d\leq x}\sum_{n\leq\frac{x}{d}} 1 = \sum_{d\leq x}\#\{m\leq x;\ d\mid m\} = \sum_{m\leq x}\sum_{d\mid m} 1 = \sum_{m\leq x}\tau(m),$$

und nach Satz 17.2 ist dies $= x\log(x) + (2\gamma-1)x + O(x^{1/2})$.
↳ vgl. Ü Bl.3 A1b)
Somit ist
$$F(x) = \left(x\log(x) - x + O(x^{1/2})\right) - \left(x\log(x) + (2\gamma-1)x + O(x^{1/2})\right) + \left(2\gamma x + O(1)\right)$$
$$= O(x^{1/2}).$$

3.) Nach der Abschätzung in 2.) ex. ein $c>0$ mit $|F(x)| \le c x^{1/2}$ für alle $x \geq 1$.
Nun sei $t \in \mathbb{N}$, $t > 1$. Dann ist für den Ausdruck in 1.), summiert bis $\frac{x}{t}$:

$$\Big|\sum_{m \le x/t} \mu(m) F(\tfrac{x}{m})\Big| \le \sum_{m \le x/t} |F(\tfrac{x}{m})| \le c \sum_{m \le x/t} \left(\tfrac{x}{m}\right)^{1/2} \overset{\int\text{-Vgl.}}{\le} c x^{1/2}\Big(1 + \int_1^{x/t} \frac{du}{u^{1/2}}\Big)$$

$$\le c x^{1/2} \Big(1 + 2 u^{1/2}\Big|_{u=1}^{u=x/t}\Big) \le c x^{1/2}\Big(1 + 2\left(\tfrac{x}{t}\right)^{1/2} - 2\Big) < \frac{2cx}{t^{1/2}}.$$

4.) Nun gilt: $F(x) = \sum_{n \le x} \left(\Psi(\tfrac{x}{n}) - \lfloor \tfrac{x}{n} \rfloor + 2\gamma\right)$ ist eine Treppenfunktion,
denn ist $b \in \mathbb{Z}$ mit $b \le x < b+1$, so ist $\lfloor \frac{x}{m} \rfloor = \lfloor \frac{b}{m} \rfloor$ für alle $m \in \mathbb{N}$, also $F(x) = F(b)$.

Ist für ein $n \in \mathbb{N}$ ein $a \in \mathbb{N}_0$ mit $a \le \frac{x}{n} < a+1$ geg., d.h. $\frac{x}{a+1} < n \le \frac{x}{a}$, so ist $F(\frac{x}{n}) = F(a)$.

Also ist
$$\underbrace{\sum_{x/t < m \le x} \mu(m) F(\tfrac{x}{m})}_{} = F(1) \sum_{x/2 < m \le x} \mu(m) + F(2) \sum_{x/3 < m \le x/2} \mu(m) + \ldots$$

zerlegen: $]\frac{x}{t}, x] =]\frac{x}{2}, x] \,\dot\cup\,]\frac{x}{3}, \frac{x}{2}] \,\dot\cup \ldots \dot\cup\,]\frac{x}{t}, \frac{x}{t-1}]$

$$\ldots + F(t-1) \sum_{x/t < m \le x/(t-1)} \mu(m).$$

Es folgt
$$\Big|\sum_{x/t < m \le x} \mu(m) F(\tfrac{x}{m})\Big| \le |F(1)| \cdot \Big|\sum_{x/2 < m \le x} \mu(m)\Big| + \ldots + |F(t-1)| \cdot \Big|\sum_{x/t < m \le x/(t-1)} \mu(m)\Big|$$

$$\le \left(|F(1)| + \ldots + |F(t-1)|\right) \cdot \max_{2 \le j \le t} \Big|\sum_{x/j < m \le x/(j-1)} \mu(m)\Big|.$$

Die letzte Summe ist
$$= \sum_{m \le x/(j-1)} \mu(m) - \sum_{m \le x/j} \mu(m) = M(\tfrac{x}{j-1}) - M(\tfrac{x}{j}) = o(x) \text{ nach } \underline{\text{Voraussetzung}},$$

wenn $j \geq 2$ fest ist und $x \to \infty$ betrachtet wird.

5.) Sei nun $\varepsilon \in]0, \frac{1}{4}[$. Wähle $t := \lfloor \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} \rfloor \geq \frac{1}{2\varepsilon^{1/2}}$.

Dann ex. y_ε mit $\Big|\sum_{m \le y} \mu(m)\Big| = |M(y)| < \varepsilon y$ für alle $y > y_\varepsilon$.

Somit ist für $x > t y_\varepsilon$ dann $\frac{x}{j} \geq \frac{x}{t} > y_\varepsilon$ für alle $j = 1, \dots, t$.

Also folgt $\left| \sum_{x/j < n \leq x/(j-1)} \mu(n) \right| \leq \left| \sum_{n \leq x/(j-1)} \mu(n) \right| + \left| \sum_{n \leq x/j} \mu(n) \right| < \varepsilon \left(\frac{x}{j} + \frac{x}{j-1} \right) \leq 2 \varepsilon x$

für $j = t, t-1, \dots, 2$.

In 4.) eingesetzt ergibt dies

$$\left| \sum_{x/t < n \leq x} \mu(n) F\left(\frac{x}{n}\right) \right| \leq 2 \varepsilon x \sum_{1 \leq j \leq t-1} |F(j)| \overset{2.)}{\leq} 2 \varepsilon x \sum_{j=1}^{t-1} c j^{1/2} < 2 c \varepsilon x t^{3/2},$$

was zusammen mit 3.) ergibt, dass

$$\left| \sum_{n \leq x} \mu(n) F\left(\frac{x}{n}\right) \right| < \left| \sum_{n \leq x/t} \mu(n) F\left(\frac{x}{n}\right) \right| + \left| \sum_{x/t < n \leq x} \mu(n) F\left(\frac{x}{n}\right) \right|$$

$$< \frac{2cx}{t^{1/2}} + 2 c \varepsilon x t^{3/2} \underset{t = \lfloor \varepsilon^{-1/2} \rfloor}{<} c x \left(2\sqrt{2}\, \varepsilon^{1/4} + 2 \varepsilon^{1/4} \right) < 5 c \underbrace{\varepsilon^{1/4}}_{\text{bel. klein wählbar}} x.$$

Somit gilt $\left| \sum_{n \leq x} \mu(n) F\left(\frac{x}{n}\right) \right| = o(x)$ für $x \to \infty$, also $\psi(x) \sim x$.

$\square$

169\. Bem.: Aus dem PZS folgt auch umgekehrt $M(x) = o(x)$. [ohne Beweis]