Vorlesung Analytische Zahlentheorie

SoSe '22, hhu
K. Halupczok

AnZ 15: Beweis des Primzahlsatzes, für ψ

Stichworte: Umformung der Dirichletreihen von $-\frac{\zeta'}{\zeta}$ und ζ zu Laplace-Integralen, Tauberbedingung wegen $\zeta(1+it) \neq 0$ für $t \neq 0$, Anwendung des Newmanschen Taubersatzes, Konvergenz des Integrals liefert genau den PZS in der ψ-Version

---

15.1. Einleitung: Die Dirichletreihe $\sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ wird für $\sigma > 1$ zu $s\int_0^\infty \psi(e^t)e^{-ts}dt$, und auch für $\zeta(s)$ gibt es eine solche Integraldarstellung. Eine geeignete Kombination liefert dann ein Integral, das mit dem Newmanschen Taubersatz zum PZS führt.

15.2. Primzahlsatz: $\psi(x) = x \cdot (1 + o(1))$ für $x \to \infty$.

Beweis: 1.) Für $\sigma = \mathrm{Re}(s) > 1$ und $N \in \mathbb{N}$ folgt mit partieller Summation:

$$\sum_{n \leq N} \underbrace{\Lambda(n) n^{-s}}_{\hookrightarrow a_n = \Lambda(n),\ f(t) = t^{-s}} = \psi(N) N^{-s} + s\int_1^N \psi(u) u^{-s-1} du.$$

Die Substitution $t = \log(u)$ formt das $\int$ um zu $\int_0^{\log(N)} \psi(e^t)(e^t)^{-s-1} \cdot e^t dt$

$\hookrightarrow e^t = u,\ \frac{du}{dt} = e^t = u$

$$= \int_0^{\log(N)} \psi(e^t)\, e^{-ts} dt.$$

- Für $N \to \infty$ konvergiert wegen $\psi(N) = O(N)$, d.h. wegen dem Satz von Tschebyschev 11.15 der Term $\psi(N) N^{-s}$ gegen 0, da $\sigma > 1$.

- Für $N \to \infty$ konvergiert $\sum_{n \leq N} \Lambda(n) n^{-s}$ wegen 5.10 nach $-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$,

und das obige Integral konvergiert (als Laplace-Transformierte von $f(t) = \psi(e^t) = O(e^t)$, vgl. 14.11),

also erhalten wir

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \cdot \frac{1}{s} = \int_0^\infty \frac{\psi(e^t)}{e^{ts}} dt \quad \text{für } \sigma > 1.$$

Mit $z := s-1$ folgt hieraus

$$-\frac{1}{z+1} \cdot \frac{\zeta'}{\zeta}(z+1) = \int_0^\infty \frac{\psi(e^t)}{e^t} e^{-tz} dt \quad \text{für } \mathrm{Re}(z) > 0.$$

2.) Analog erhält man $\frac{1}{z+1}\cdot\zeta(z+1) = \int_0^\infty \frac{\lfloor e^t\rfloor}{e^t}\cdot e^{-tz}\,dt$ für $\mathrm{Re}(z)>0$.

⌜ $\underbrace{\sum_{n\le N} 1\cdot n^{-s}}_{\xrightarrow{N\to\infty}\zeta(s)} \overset{\text{p.}\Sigma}{=} \underbrace{\lfloor N\rfloor\cdot N^{-s}}_{\xrightarrow{N\to\infty}0} + \underbrace{s\int_1^N \lfloor u\rfloor\cdot u^{-s-1}\,du}_{\text{kgt. für } N\to\infty}$ mit $\int = \int_0^{\log(N)} \lfloor e^t\rfloor (e^t)^{-s-1}\cdot e^t\,dt$,

$z:=s-1$ ⌟

3.) Nach 10.2, der Darstellung $\zeta(s) = \frac{1}{s-1}+\frac{1}{2} - s\int_1^\infty P_0(t)\,t^{-s-1}\,dt$, $P_0(t)=t-\lfloor t\rfloor-\frac{1}{2}$, und der Tatsache $\zeta(1+it)\neq0$ für $t\neq0$ nach 13.2.,

ist somit $-\frac{\zeta'}{\zeta}(z+1)-\zeta(z+1)$ holomorph für $\mathrm{Re}(z)\geq 0$.

⌜ • Der Pol bei $z=0$ in $\zeta(z+1)=\frac{1}{z}+H(z)$ wird mit $\frac{\zeta'}{\zeta}(z+1)=\frac{-\frac{1}{z^2}+H'(z)}{\frac{1}{z}+H(z)} = -\frac{1}{z}+\hat{H}(z)$ in diesem Ausdruck eliminiert. • Für $\mathrm{Re}(z)=0$ mit $z\neq0$ greift $\zeta(z+1)\neq0$. ⌟

Somit kann im Hinblick auf den Newmanschen Taubersatz 14.13.

$$F(z)=\frac{1}{z+1}\left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(z+1)-\zeta(z+1)\right)=\int_0^\infty\left(\frac{\psi(e^t)}{e^t}-\frac{\lfloor e^t\rfloor}{e^t}\right)e^{-tz}\,dt$$

geschrieben werden.

Wegen $\psi(e^t)=O(e^t)$ nach Tschebyschev ist die Funktion $\frac{\psi(e^t)}{e^t}-\frac{\lfloor e^t\rfloor}{e^t}$ beschränkt (und offenbar auf jedem Intervall integrierbar).

Also ist die Tauberbedingung des Newmanschen Taubersatzes erfüllt, nach diesem ist also $\int_0^\infty e^{-t}(\psi(e^t)-\lfloor e^t\rfloor)\,dt$ konvergent.

Ersetzt man nun $\lfloor e^t\rfloor$ durch $e^t-\{e^t\}$, d.h. wo $\{x\}:=x-\lfloor x\rfloor\in[0,1[$, und berücksichtigt man die Konvergenz von $\int_0^\infty e^{-t}\{e^t\}\,dt$ (Laplace-Transformierte von $\{e^t\}$ bei $z=1$) dann erhält man, dass

$$\int_0^\infty(\psi(e^t)e^{-t}-1)\,dt \quad \text{Konvergiert.} \qquad (*)$$

Wir zeigen im Rest des Beweises nur noch, dass dann aus (*) folgt, dass $\psi(e^t)e^{-t}\to1$ für $t\to\infty$ gilt.

4.) Es werde nun angenommen, dass $\limsup_{t\to\infty} \Psi(e^t)e^{-t} > 1$ sei.
($\limsup$ = Infimum der oberen Häufungswerte)

Dies bedeutet, dass es eine gegen ∞ divergente Folge $(t_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ und ein $\delta > 0$ gibt, so dass $\forall \nu \in \mathbb{N}: \Psi(e^{t_\nu}) \geq e^{t_\nu}(1+\delta)$.

Mit einem (kleinen) $c > 0$ folgt daraus für jedes $\nu \in \mathbb{N}$, dass

$$\int_{t_\nu}^{t_\nu+c} \left(\frac{\Psi(e^t)}{e^t} - 1\right) dt \geq \int_{t_\nu}^{t_\nu+c} \frac{e^{t_\nu}(1+\delta)}{e^{t_\nu+c}}\, dt - c = c\cdot\left((1+\delta)e^{-c} - 1\right).$$

Wenn $c = c(\delta) > 0$ genügend klein gewählt wird, so ist dies $\geq c \cdot \frac{\delta}{2}$.

Wegen der Konvergenz des Integrals (*) müsste $\int_{t_\nu}^{t_\nu+c} \left(\frac{\Psi(e^t)}{e^t} - 1\right) dt$ bei $\nu \to \infty$ aber gegen 0 konvergieren, was einen Widerspruch darstellt.

5.) Genau analog argumentiert man, dass die Annahme $\liminf_{t\to\infty} \Psi(e^t)e^{-t} < 1$ zu einem Widerspruch zur Konvergenz des Integrals (*) führt.
($\liminf$ = Supremum der unteren Häufungswerte)

6.) Aus 4.) und 5.) folgt, dass $\lim_{t\to\infty} \Psi(e^t)e^{-t} = 1$ ist.

Dies ist mit $x = e^t$ der PZS in der Ψ-Version. $\square$