Vorlesung Analytische Zahlentheorie

SoSe '22, hhu
K. Halupczok

AnZ 14: Newmanscher Taubersatz

Stichworte: Satz von Abel für Potenzreihen, Umkehrung heißt Taubersatz, Taubersatz für Potenzreihen, Tauberbedingungen, Satz von Landau-Wiener-Ikehara ($\Rightarrow$ PZS), Laplace-Transformierte, Newmanscher Taubersatz (für Laplace-Transformierte)

14.1. Einleitung: Zum Beweis des PZS werden die bisher erarbeiteten Eigenschaften von ζ ausreichen. Wir werden in diesem Kapitel das analytische Werkzeug dafür einführen und beweisen, nämlich einen Tauber-Satz.

Zunächst zum Hintergrund, was ein Tauber-Satz ist.
Aus der Analysis ist der folgende Satz von Abel bekannt:

14.2. Satz (Abel): Die Reihe $\sum_{n\geq 0} a_n$ mit $(a_n) \subseteq \mathbb{C}$ sei konvergent mit Grenzwert $S \in \mathbb{C}$. Dann ist die Funktion $F(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ mit $|z|<1$ stetig in den Punkt $z=1$ fortsetzbar mit $\lim_{z\to 1-} F(z) = S$. [ohne Beweis]

Dieser Satz besagt, dass aus Eigenschaften der summatorischen Funktion $\sum_{n\leq x} a_n$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Eigenschaften der von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erzeugten Potenzreihe(nfunktion) $F(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ geschlossen werden kann. Dies sieht man gut an einer bekannten

14.3. Beispielanwendung des Satzes von Abel (auch abelscher Satz genannt): Sei $a_n := \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, so dass $\sum_{n\geq 0} a_n z^n = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n = \log(1+z)$ die bekannte Potenzreihenentwicklung der Logarithmusfunktion ist, welche für $|z|<1$ gilt. Um für Randpunkte mit $|z|=1$ etwas aussagen zu können, wird der abelsche Satz herangezogen. Das geht hier für $z=1$, denn $\log(1+z)$ ist offenbar in $z=1$ stetig fortsetzbar durch $\log(2)$. Der abelsche Satz zeigt die Konvergenz von $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, und dass dies $=\log(2)$ ist.

Die Umkehrungen des abelschen Satzes sind nicht ohne weiteres möglich und schwierig. Sätze dieser Art heißen Taubersätze.

Die unmittelbare Umkehrung des abelschen Satzes wäre von dem Typ "Stetigkeit von F bei 1 bewirkt Konvergenz von $\sum_{n\geq 1} a_n$".
Wir zeigen an folgendem Beispiel, dass dies nicht ohne weiteres machbar ist:

14.5. Bsp.: Sei $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = \frac{1}{1+z}$ für $|z|<1$.
Dann ist $\lim_{z\to 1-} F(z) = \lim_{z\to 1-} \frac{1}{1+z} = \frac{1}{2}$, aber $\sum_{n\geq 1} (-1)^n$ divergent.

In Taubersätzen wird demnach unter zusätzlichen Bedingungen an die erzeugte Funktion F auf die Koeffizientenfolge geschlossen. Diese erforderlichen Bedingungen heißen Tauberbedingungen.
Für Potenzreihen gibt es den folgenden Taubersatz:

14.6. Satz von Tauber (Originalversion): Sei $F(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius 1.
Der Grenzwert $s := \lim_{x\to 1-} f(x)$ existiere, und es gelte die Tauberbedingung: $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.
Dann konvergiert $\sum_{n\geq 0} a_n$ und ist $= s$. [ohne Beweis]

14.7. Bsp.: $F(z) = \sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} z^n$ hat den Kgz.radius 1, haben $F''(z) = \frac{1}{1+z}$, also $F(z) = (1+z)\log(1+z) - z$,
und $F(1) = 2\log(2) - 1$. Die Tauberbedingung ist erfüllt, da $\frac{(-1)^n}{n(n-1)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right)$.
Nach 14.6 ist also $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} = \log(4) - 1$.

14.8. Motivation: Wir benötigen einen Taubersatz für Dirichletreihen: Aus der Konvergenz/analytischen Eigenschaften der Reihe $\sum_{n\geq 1} \Lambda(n) n^{-s}$ von $-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ für $\sigma > 1$ soll auf $\sum_{n\leq x} \Lambda(n) = \psi(x)$ geschlossen werden, da wir $\psi(x) = (1+o(1))x$ zeigen wollen.

Ein oft benutzter, aber nicht leicht zu beweisender Taubersatz für Dirichletreihen ist der

14.9. Satz von Landau-Wiener-Ikehara: Die Dirichletreihe $F(s) = \sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$ habe nichtnegative Koeffizienten und sei konvergent für $\sigma > 1$.
Tauberbedingung: Es gebe weiter ein $A > 0$ so, dass $F(s) - \frac{A}{s-1}$ in ein Gebiet analytisch fortsetzbar ist, das die abgeschlossene Halbebene $\{s \in \mathbb{C};\ \sigma \geq 1\}$ umfasst.
Dann gilt $\sum_{n\leq x} a_n = (A + o(1))\, x$. [ohne Beweis]

14.10. <u>Bem.:</u> • Dieser Satz ist sofort auf unsere Situation, $F(s)=\sum_{n\geq 1}\Lambda(n)n^{-s} = -\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ anwendbar: Der Pol von ζ bei 1 bewirkt den Pol-Anteil $\frac{1}{s-1}$ von $-\frac{\zeta'}{\zeta}$, und das Nichtverschwinden von ζ auf $\sigma=1$ sichert die geforderte Fortsetzbarkeit. Die Beh. ist der PZS $\psi(x)=(1+o(1))\cdot x$.

• Im Jahr 1980 fand D.J. Newman einen Taubersatz, der relativ rasch zu zeigen ist und für den Beweis des PZSes gerade ausreicht. Wir werden diesen Satz hier beweisen, der kein Taubersatz für Dirichletreihen, sondern für die Laplace-Transformierte einer Fkt. f ist. Er beruht auf einer scharfsinnigen Anwendung der Cauchyschen Integralformel.

14.11. <u>Def./Satz:</u> Sei $f:\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{C}$ so, dass $\exists C>0\ \exists s_0>0\ \exists T>0$: $|f(t)|\leq Ce^{s_0 t}$ für $t>T$, und sei $\int_0^T |f(t)|\,dt$ endlich. Dann stellt

$$F(z):=\int_0^\infty f(t)e^{-zt}\,dt$$

eine für $\mathrm{Re}(z)>s_0$ holomorphe Funktion dar.
Diese heißt Laplace-Transformierte von f.

14.12. <u>Bem.:</u> Wir beweisen die Holomorphie von $F(z)$ in $\mathrm{Re}(z)>s_0$ hier nicht, sondern verweisen auf die Literatur, z.B. über Differentialgleichungen / Operatorenrechnung / Maßtheorie...

14.13. Newmanscher Taubersatz: Es sei $f:\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{C}$ beschränkt und auf jedem Intervall $[0,a]$, $a>0$, Riemann-integrierbar. Es sei die Laplace-Transformierte F von f holomorph fortsetzbar in ein Gebiet, das die imaginäre Achse $\{\sigma=0\}$ umfasst (Tauber-Bedingung).
Dann gilt: $\int_0^\infty f(t)\,dt$ existiert
(und hat den Wert $F(0)$), also $\int_0^\infty f(t)\,dt = F(0)$.

<u>Bew.:</u>

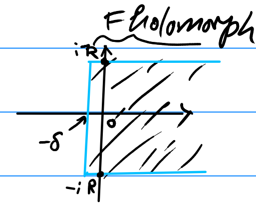
1.) Für $0<\lambda<\infty$ sei $F_\lambda(z):=\int_0^\lambda f(t)e^{-zt}\,dt$.

Dann ist F_λ eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion.

Es genügt z.z., dass $F_\lambda(0)=\int_0^\lambda f(t)\,dt \xrightarrow{\lambda\to\infty} F(0)$ gilt.

Oder, wenn $\varepsilon>0$ vorgegeben ist, dass $|F_\lambda(0)-F(0)|<\varepsilon$ für $\lambda\geq\lambda_0(\varepsilon)$. ①

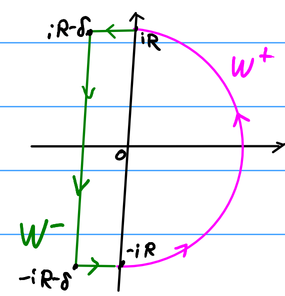
2.) Es werde $R>0$ vorläufig beliebig gewählt, später in Abhängigkeit von ε genügend groß. Nach Vor. gibt es ein $\delta=\delta(R)>0$ so, dass F holomorph ist für $Re(z)\geq -\delta$, $|Im(z)|\leq R$.



Sei nun $W=W(R)$ der folgende geschlossene Weg, positiv umlaufen:

a) Der Halbkreis vom Radius R um $z_0=0$ in der rechten Halbebene (W^+).

b) Der Rechteckweg von iR nach $iR-\delta$, von $iR-\delta$ nach $-iR-\delta$ und von $-iR-\delta$ nach $-iR$. $\Big\}$ (W^-)



Dann zeigt die Cauchysche $\int$-Formel,
$\left[\, g(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_W \frac{g(z)}{z}\,dz, \text{ für } g(z):=(F(z)-F_\lambda(z))e^{\lambda z}\cdot\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\right]$

dass (2)
$$F(0)-F_\lambda(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_W (F(z)-F_\lambda(z))e^{\lambda z}\left(\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}\right)dz.$$

Die Verwendung dieses Integranden ist als der eigentliche Beweistrick anzusehen. Er erlaubt es, das Integral auf W gut abzuschätzen. Die Standard-Anwendung der Cauchyschen Formel mit dem Integranden $(F(z)-F_\lambda(z))\cdot\frac{1}{z}$ würde zu Schwierigkeiten führen.

3.) Nach Voraussetzung kann $\forall t\geq 0: |f(t)|\leq A$ benutzt werden.
Für $x=Re(z)>0$ und $|z|=R$ ist $\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}+\frac{x+iy}{R^2}=\frac{2x}{R^2}$,

und $|F(z)-F_\lambda(z)|=\left|\int_\lambda^\infty f(t)e^{-zt}dt\right|\leq A\int_\lambda^\infty e^{-xt}dt=\frac{-A}{x}e^{-xt}\Big|_{t=\lambda}^{t=\infty}=\frac{A}{x}\cdot e^{-\lambda x}$.

Damit lässt sich der Integrand in (2) für $x=Re(z)>0$ im Betrag abschätzen durch

$$\underbrace{|F(z)-F_\lambda(z)|}_{\le \frac{A}{x}e^{-\lambda x}}\cdot|e^{\lambda z}|\cdot\underbrace{\left|\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}\right|}_{\frac{2x}{R^2}}$$

$$\le \frac{A}{x}e^{-\lambda x}\cdot e^{\lambda x}\cdot\frac{2x}{R^2}=\frac{2A}{R^2},\quad \text{dies ergibt}\quad \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{W^+}\cdots\right|\le\frac{A}{R}. \quad (3)$$

$\hookrightarrow$ Weglänge $=\pi R$

4.) Bei $-F_\lambda$ wird W^- deformiert zum Halbkreis vom Radius R in der linken Halbebene, dabei wird keine Singularität überstrichen. Wie in 3.) erhält man dort $|F_\lambda(z)|=\left|\int_0^\lambda f(t)e^{-zt}dt\right|\le A\int_0^\lambda e^{-xt}dt<\frac{Ae^{-\lambda x}}{|x|}$ (beachte: $x<0$)

und $\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{W^-}(-F_\lambda(z))e^{\lambda z}\left(\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}\right)dz\right|\le\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2A}{R^2}\cdot\pi R=\frac{A}{R}.$ (4)

$\hookrightarrow$ Weglänge des Halbkreises

5.) Es bleibt der Beitrag von $F(z)$ über W^-.
Die Funktion $F(z)\cdot\left(\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}\right)$ ist auf dem Kompaktum W^- holomorph und somit durch ein $B=B(R)>0$ beschränkt.
Das F-Integral über die Vertikale von W^- ist daher

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{iR-\delta}^{-iR-\delta}F(z)\cdot e^{\lambda z}\left(\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}\right)dz\right|\le\frac{1}{2\pi}\cdot 2R\cdot B\cdot e^{-\delta\lambda}=\frac{1}{\pi}BRe^{-\delta\lambda}. \quad (5)$$

$\{x=-\delta\rightsquigarrow|e^{\lambda z}|=e^{-\lambda\delta}$

Die Integrale über die Horizontalen sind

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{iR-\delta}^{iR}F(z)e^{\lambda z}\left(\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}\right)dz\right|\le\frac{1}{2\pi}\cdot 2B\int_{-\delta}^{0}e^{x\lambda}dx=\frac{B}{\pi}\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}e^{-\delta\lambda}\right)<\frac{B}{\pi\lambda}.$$

bzw. $\int_{-iR-\delta}^{-iR}\cdots\rightarrow x\in[-\delta,0]$ $\quad\rightarrow$ insg. $<\frac{2B}{\pi\lambda}$ (6)

6.) Zusammenfassung von (2), ..., (6) liefert für beliebiges R und $\lambda>0$

$$|F(0)-F_\lambda(0)|<\underbrace{\frac{2A}{R}}_{\text{von (3)\&(4)}}+B(R)\cdot\Big(\underbrace{R\frac{1}{\pi}e^{-\delta\lambda}}_{\text{von (5)}}+\underbrace{\frac{2}{\pi\lambda}}_{\text{von (6)}}\Big). \quad (7)$$

- Es werde als erstes R so groß gewählt, dass $\frac{2A}{R}<\frac{\varepsilon}{2}$.
- Für jetzt festgehaltenes R (und damit fixe $B(R)$ und δ) gilt $\lim_{\lambda\to\infty}\left(\frac{R}{\pi}e^{-\delta\lambda}+\frac{2}{\pi\lambda}\right)=0$, und für $\lambda\ge\lambda_0(\varepsilon)$ ist

daher der zweite Teil rechts in (7) dann auch $<\frac{\varepsilon}{2}$.

Damit ist für (1) der Beweis geführt. $\square$