Vorlesung Analytische Zahlentheorie

SoSe '22, hhu
K. Halupczok

AnZ 13: Nichtverschwinden von $\zeta(s)$ auf $\{\sigma = 1\}$

Stichworte: $\zeta(1+it) \neq 0$ für beliebiges $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ⌈durch Betrachtung von Polen/Nst. der Funktion $\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+it)$ bei einer potentiellen Nst. $1+it$ von ζ⌋

13.1. Einleitung:
Die Aussage $\zeta(s) \neq 0$ für $\sigma = 1$, bewiesen von de la Vallée-Poussin/Hadamard, ist zentral für den Beweis des PZSes $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$. Wir zeigen sie in diesem Kapitel zuerst. Dabei geht eine trigonometrische Ungleichung in 13.2. 2.) ein. Weitere Kenntnis über nullstellenfreie Gebiete von ζ im kritischen Streifen verbessert den PZS-Fehlerterm.

Wir wissen bereits aus Satz 10.9, dass die ζ-Reihe auf der Geraden $\{\sigma=1\} = \{1+it;\, t \in \mathbb{R}\}$ nicht konvergiert, die Werte von ζ können dort aber mit der Darstellung aus Satz 10.2 berechnet werden. Weiter ist $\zeta(s) \neq 0$ für $\mathrm{Re}(s) = \sigma > 0$ bekannt aus Satz 9.2. Wir zeigen jetzt, dass sich diese Nullstellenfreiheit von ζ noch auf die Gerade $\{\sigma = 1\}$ fortsetzt.

13.2. Satz: $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \zeta(1+it) \neq 0.$

Bew.: 1.) Für jedes $\varphi \in \mathbb{R}$ ist $3 + 4\cos(\varphi) + \cos(2\varphi) \geq 0$.

Bew.: $\text{l.S.} = 2 + 4\cos(\varphi) + \cos^2(\varphi) + \underbrace{1 - \sin^2(\varphi)}_{\cos^2(\varphi)} = 2\,(1 + \cos(\varphi))^2 \geq 0.$

2.) Für $\sigma > 1$ und $t \neq 0$ setze $V(\sigma, t) := \mathrm{Re}\left(3\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) + 4\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+it) + \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+2it)\right)$.

Mit $-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{n \geq 1} \Lambda(n) n^{-s}$ aus 5.10 ist dann

$$V(\sigma,t) = \mathrm{Re}\left(3\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) + 4\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+it) + \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+2it)\right)$$

$$\overset{5.10}{=} -\mathrm{Re}\left(\sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}\left(3+4n^{-it}+n^{-2it}\right)\right)$$

$$= -\sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}\left(3+4\cos(-t\log n)+\cos(-2t\log n)\right) \overset{1.)}{\leq} 0.$$

$n^{it} = \cos(t\log n) + i\sin(t\log n)$

3.) • Angenommen, $1+it$ sei Nst. von ζ der Ordnung $m\in\mathbb{N}$,

d.h. es ist $\zeta(\sigma+it) = (\sigma-1)^m \cdot \tilde{h}(\sigma-1)$
mit einer in einer Umgebung der 0 differenzierbaren Fkt. $\tilde{h}: \mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{C}$,
wo $\tilde{h}(0)\neq 0$ ist. ⌜Lese die Glg. als Def. für $\tilde{h}$, dann Beh. für $\tilde{h}$ klar.⌟
Dabei ist dann

$$\zeta'(\sigma+it) = m(\sigma-1)^{m-1}\cdot\tilde{h}(\sigma-1) + (\sigma-1)^m\cdot\tilde{h}'(\sigma-1),$$

es folgt $\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+it) = \frac{m}{\sigma-1} + h(\sigma-1)$
mit einer auf $\sigma\in[1,2]$ beschränkten Funktion h (da $\tilde{h},\tilde{h}'$ dies ist).

• Analog erhält man, wenn ζ bei $1+2it$ von k-ter Ordnung mit $k\in\mathbb{N}_0$ verschwindet (d.h. bei $k=0$ liegt keine Nst. vor),

die Gleichung $\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+2it) = \frac{k}{\sigma-1} + g(\sigma-1)$,

mit einer auf $\sigma\in[1,2]$ beschränkten Funktion $g(\sigma-1)$.

• Wegen des Pols von ζ bei $s=1$ ist

$\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) = \frac{-1}{\sigma-1} + h_0(\sigma-1)$, mit $h_0(\sigma-1)$ beschränkt auf $\sigma\in[1,2]$,

vgl. Ü Bl. 7, A3(a)

4.) Die Resultate 2.) und 3.) ergeben

$$0 \overset{2.)}{\geq} V(\sigma,t) = \mathrm{Re}\left(3\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) + 4\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+it) + \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+2it)\right)$$

$$\overset{3.)}{=} \mathrm{Re}\left(3\cdot\frac{-1}{\sigma-1} + 4\cdot\frac{m}{\sigma-1} + \frac{k}{\sigma-1}\right) + \text{Beschränktes}$$

für $\sigma \to \underline{\underline{1+}}$,

d.h.

$$0 \geq \frac{-3+4m+k}{\sigma-1} + \text{Beschränktes für } \sigma \to \underline{\underline{1+}}.$$

Für $\sigma \to \underline{1+}$ wird die r.S. wegen $m \geq 1$ beliebig groß, insbesondere positiv, was einen Widerspruch bedeutet. $\square$

13.3. <u>Bem.</u>: Jeder bekannte analytische Beweis des PZS geht über diesen Satz <u>13.2</u>, und in jedem bekannten Beweis von <u>13.2</u> wird die trigonometrische Ungleichung $3 + 4\cos(\varphi) + \cos(2\varphi) \geq 0$ verwendet. Bisher konnte diese Ungleichung nicht durch eine (wesentlich) andere ersetzt werden, mit der der Beweis von <u>13.2</u> analog machbar und der Fehlerterm im PZS verbesserbar wäre.

⌜Bringt die Ungl. $\frac{n+1}{2} + n\cos(\varphi) + (n-1)\cos(2\varphi) + \ldots + \cos(n\varphi) \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ <u>bel.</u>, einen Mehrwert?⌟