Vorlesung Analytische Zahlentheorie

SoSe'22, hhu
K. Halupczok

AnZ 12: Über den Primzahlsatz

Stichworte: Vermutungen zu $\pi(x)$, Logarithmisches Integral $li(x)$, der Primzahlsatz (und verschiedene Versionen im Vergleich), Fehlerterm im PZS und Riemannsche Vermutung

12.1. Einleitung: Das Studium der Primzahlmenge $\mathbb{P}$ beinhaltet die Frage, wie die Aussage $\#\mathbb{P}=\infty$ spezifiziert werden kann, d.h. wie die unstetige PZ-Zählfunktion $\pi(x)=\#\{p\le x\}$ durch eine differenzierbare Funktion approximiert werden kann.

Euklids Beweis für $\#\mathbb{P}=\infty$ aus der Antike kann genauer zum Resultat $\pi(x)\ge \log\log(x)$ umformuliert werden, was sehr schwach ist. Denn nach dem Satz von Tschebyschev 11.15(a) ist $\frac{x}{\log(x)} \ll \pi(x) \ll \frac{x}{\log(x)}$, wobei die impliziten Konstanten, je nach Aufwand des Beweises, recht nahe an 1 gedrückt werden können, wenn x genügend groß gewählt wird.
Heute (seit 1975) hat man:

$$\frac{x}{\log(x)} \overset{x\ge 17}{\le} \pi(x) \overset{x>1}{\le} 1.25506\,\frac{x}{\log(x)}$$

Dabei drängt sich die Vermutung auf, ob $\frac{x}{\log(x)}$ die exakte Größenordnung von $\pi(x)$ in Form einer Asymptotik ist, d.h. ob $\pi(x)\sim\frac{x}{\log(x)}$ ist.
(Erinnerung an die Notation aus 3.16: $f(x)\sim g(x)$ für $x\to\infty :\Leftrightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1$.
D.h. hier also: $\frac{\pi(x)}{x/\log(x)} \xrightarrow{x\to\infty} 1$.)

12.2. Bem.: Nur durch numerische Auswertung (d.h. durch händisches Auszählen mit Primzahltabellen) wurden schon früh folgende Vermutungen aufgestellt:

- Vermutung von Legendre (1808): $\pi(x)\sim\frac{x}{\log(x)-1.08366}$.
- Vermutung von Gauß (1849): $\pi(x)\sim li(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log(t)}$.

12.3. **Def.:** Die Funktion $li : \mathbb{R}_{\geq 2} \to \mathbb{R}$, $li(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log(t)}$, heißt logarithmisches Integral.
(sprich: "Li von x")

12.4. **Bem.:** Die Vermutung von Gauß, $\pi(x) \sim li(x)$, ist äquivalent zur Aussage $\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)}$ (und somit zur Vermutung von Legendre) denn es gilt:

$$li(x) = \frac{x}{\log(x)} + o\left(\frac{x}{\log(x)}\right),$$

nämlich: $li(x) = \frac{x}{\log(x)} + O\left(\frac{x}{\log^2(x)}\right) = \frac{0!\, x}{\log(x)} + \frac{1!\, x}{\log^2(x)} + O\left(\frac{x}{\log^3(x)}\right)$ usw.

Dies zeigt folgender

12.5. **Satz:** $\forall n \in \mathbb{N} : li(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)!\, x}{\log^k(x)} + n! \int_2^x \frac{dt}{\log^{n+1}(t)} + O(1)$, wo $\int_2^x \frac{dt}{\log^{n+1}(t)} = O\left(\frac{x}{\log^{n+1}(x)}\right)$.

Bew.: Induktion:

$n=1$: $li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log(t)} = \int_2^x \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\frac{1}{\log(t)}}_{v} \cdot dt \overset{p.I}{=} \frac{t}{\log(t)}\Big|_2^x + \int_2^x \frac{t}{t\log^2(t)}\,dt = \frac{x}{\log(x)} + \int_2^x \frac{dt}{\log^2(t)} + O(1)$

Schritt $n \rightsquigarrow n+1$: $\int_2^x \frac{dt}{\log^n(t)} = \int_2^x \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\frac{1}{\log^n(t)}}_{v} \cdot dt \overset{p.I}{=} \frac{t}{\log^n(t)}\Big|_2^x + n\int_2^x \frac{t}{t\log^{n+1}(t)}\,dt$

$u=1 \quad v' = \frac{-n}{\log^{n+1} t}$

$$= \frac{x}{\log^n(x)} + n\int_2^x \frac{dt}{\log^{n+1}(t)} + O(1),$$

und dies in die n-te Formel einsetzen gibt die $(n+1)$-te Formel.

Beachten: $\forall n \in \mathbb{N}: \int_2^x \frac{dt}{\log^n(t)} = \int_2^{\sqrt{x}} \underbrace{\frac{1}{\log^n(t)}}_{\leq 1} dt + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{dt}{\log^n(t)} = O(\sqrt{x}) + O\left(\frac{x}{\log^n(x)}\right) = O\left(\frac{x}{\log^n(x)}\right)$.

Integrationsweglänge $\leq x$, $\log^n(t) \gg \log^n(x)$ $\square$

12.6. **Bem.:** • Welche Vermutung ist die genauere/bessere? $\pi(x) \sim li(x)$ oder $\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)}$ oder die von Legendre, $\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x) - A}$ mit $A = 1.08366$? Die genauere Version liefert $\pi(x) \sim li(x)$ wie numerische Daten äußerst gut bestätigen, auch im Hinblick auf die Vermutung in 12.10.

• Die beste Approximation an $\pi(x)$ durch eine Funktion der Gestalt $\frac{x}{\log x - A}$ wird demnach mit $A = 1$ erreicht, denn

$$li(x) \sim \frac{x}{\log x - A} \iff \frac{x}{\log(x)} + \frac{x}{\log^2(x)} + o\left(\frac{x}{\log^2(x)}\right) \sim \frac{x}{\log(x) - A}$$

$$\iff \frac{\log(x)+1}{\log^2(x)} + o\left(\frac{1}{\log^2(x)}\right) \sim \frac{1}{\log(x) - A} \iff \frac{\log^2(x) - A\log(x) + \log x - A}{\log^2(x)} \sim 1 + \underbrace{o\left(\frac{\log(x) - A}{\log^2(x)}\right)}_{= o\left(\frac{1}{\log x}\right)}$$

$$\Rightarrow \log^2(x) - A\log(x) + \log(x) - A \sim \log^2(x) + o(\log x) \Rightarrow (1-A)\log x = o(\log x),$$

was für $A \neq 1$ ein Widerspruch ist.

• Lange Zeit wurde vergeblich versucht, die Aussage $\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)}$ (oder eine der äquivalenten Versionen) zu beweisen.
Tschebyschev konnte 1851 in diesem Zusammenhang immerhin zeigen:
Falls der Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log(x)}$ existiert, so muss er $=1$ sein.

Der endgültige Beweis gelang erst 1896 durch Hadamard und de la Vallée-Poussin (unabhängig voneinander), und ist heute als der Primzahlsatz (PZS) bekannt. Es gilt also:

12.7. PZS: $\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)}$, und die in 12.6 genannten, dazu äquivalenten Versionen.
Bem.: Weitere äquivalente Umformulierungen, die durch unmittelbare Umformulierung mit der o-Notation erhältlich sind, lauten:

$$\pi(x) = \frac{x}{\log(x)}\cdot(1+o(1)) = \frac{x}{\log(x)} + o\left(\frac{x}{\log(x)}\right) = li(x)\cdot(1+o(1)) = li(x) + o(li(x))$$
$$= \frac{x}{\log(x)-A}\cdot(1+o(1)) \quad \text{usw. (bel. } A\in\mathbb{R}\text{).}$$

Die Umformulierung in die ψ- und ϑ-Version ist für uns noch wichtig, und zeigt, dass diese technisch leichter zu handhaben sind, weil darin der Logarithmus nicht mehr vorkommt:

12.8. Satz: Äquivalent zu $\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)}$ ist $\psi(x) \sim x$ und $\vartheta(x) \sim x$.
Bew.: • Die Versionen $\psi(x) \sim x$ und $\vartheta(x) \sim x$ sind äquivalent wegen $\psi(x) = \vartheta(x) + O(\sqrt{x})$ nach 11.13.
• Wir haben $\pi(x) = \vartheta(x)\cdot\frac{1}{\log(x)} + \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t\log^2(t)}\,dt$ laut part. Σ (s. Bew. von 11.17), wobei

$$\int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t\log^2(t)}\,dt \underset{\text{Tsch.: } \vartheta(t)\ll t}{=} O\left(\int_2^x \frac{dt}{\log^2(t)}\right) = O\left(\frac{x}{\log^2(x)}\right) = o\left(\frac{x}{\log(x)}\right) \text{ ist.}$$

Somit ist $\pi(x) = \frac{x}{\log(x)} + o\left(\frac{x}{\log(x)}\right)$ äquivalent zu $\vartheta(x) = x + o(x)$. $\square$

12.9. Bem.: Wir kommen noch zur Frage nach der Größenordnung der Fehlerglieder in den PZS-Versionen.
Die beste Approximation liefert anscheinend die Version $\pi(x) \sim li(x)$, numerische Daten zeigen dies deutlich. Wie gut diese Approximation ist, ist bis heute eins der wichtigsten zentralen ungelösten Probleme der Mathematik:

12.10. Riemannsche Vermutung (RH) $\iff \pi(x) - li(x) = O(\sqrt{x}\log(x))$.

- Genauer: 1) RH $\Rightarrow \pi(x) = li(x) + O(\sqrt{x}\log(x))$, 2) $\forall \varepsilon > 0: \pi(x) = li(x) + O_\varepsilon(x^{1/2+\varepsilon}) \Rightarrow$ RH.
- Wir werden die Riemannsche Vermutung noch später als eine analytische Aussage über die Lage der Nullstellen der Zetafunktion ζ formulieren. Damit kann die behauptete Äquivalenz in 12.10 gezeigt werden.
- Die äquivalente Umformulierung in 12.10 macht den Nutzen der RH für die Theorie zur Verteilung der PZen sehr deutlich: Nach dieser sind die PZen so gut wie nur möglich durch $li(x)$ verteilt.

Wir werden in dieser Vorlesung in den folgenden Kapiteln zwei moderne, kurze Beweise des PZSes geben: einer mit Λ, und einer mit μ. Es handelt sich um analytische Beweise mit ζ. Jeder bekannte analytische Beweis des PZSes (wie auch von Hadamard und de la Vallée-Poussin) benutzt dabei die trigonometrische Ungl. $3 + 4\cos(\alpha) + \cos(2\alpha) \geq 0$.
Dies gilt: l.S. $= 3 + 4\cos(\alpha) + \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 2 + 4\cos(\alpha) + \cos^2(\alpha) + \underbrace{1 - \sin^2(\alpha)}_{=\cos^2(\alpha)} = 2(1+\cos\alpha)^2$ ⌟

Später wurden 1948 von Erdős und Selberg elementare Beweise gefunden, die ohne analytische Hilfsmittel auskommen, aber recht kompliziert sind.

- Wir werden in dieser Vorlesung keine expliziten Fehlertermabschätzungen im PZS beweisen. Diese würden noch mehr Informationen über ζ erforderlich machen. Ohne allzu großen Aufwand kann man in weiterführenden Vorlesungen $O(x\exp(-C\log^{1/10}(x)))$ dafür zeigen, auch $O(x\exp(-C\log^{1/2}(x)))$ ist gerade so machbar.
- Die bis heute beste Version des Fehlerterms ist die von Vinogradov/Korobov aus dem Jahr 1958.
  Nach dieser kann der Fehlerterm zu $O(x\exp(-C\log^{3/5}(x)\,\log\log^{-1/5}(x)))$ abgeschätzt werden. Allein schon die Potenz x^1 zu $x^{1-\delta}$ zu verbessern, erscheint aber unüberwindbar schwer, wir werden später noch verstehen, womit dies zusammenhängt.