Vorlesung Analytische Zahlentheorie

SoSe'22, hhu
K. Halupczok

AnZ 11: Primzahlen zählen

Stichworte: Primzahlzählfunktionen π, ϑ, ψ, enger Zusammenhang zwischen ϑ und ψ, Satz von Tschebyschev mit Beweis (nach Erdős/Tschebyschev), Bertrands Postulat

---

11.1. Einleitung: Die analytischen Eigenschaften von ζ hängen unmittelbar mit Fragen zur Verteilung von Primzahlen zusammen.
Wir behandeln dafür zunächst die Primzahlzählfunktionen π, ϑ und ψ.
Dabei ist π die natürlichste Version, und ϑ bzw. ψ "gewichtete" Versionen, die technisch meistens viel leichter als π handzuhaben sind.

11.2. Def.: Sei $x>1$ reell. Def. $\pi(x) := \#\{p\leq x;\ p\in\mathbb{P}\} = \sum_{p\leq x} 1$.
Die Funktion $\pi:\mathbb{R}_{>1}\to\mathbb{N}$ heißt Primzahlzählfunktion.

11.3. Beispielwerte: $\pi(10.2)=4$, $\pi(2)=1$, $\pi(1.5)=0$, ... (sinnvoll ab $x\geq 2$).

11.4. Bem.: Eng verbunden mit der PZZählfkt. π ist die Größe der n-ten Primzahl p_n wegen $\pi(p_n)=n$. (Also $p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=5$, $p_4=7$ usw.)

11.5. Def.: Sei $x\geq 2$ reell. Def. $\vartheta(x) := \sum_{p\leq x}\log(p)$. Diese Funktion $\vartheta:\mathbb{R}_{\geq 2}\to\mathbb{R}$ heißt erste Tschebyschev-Funktion.

11.6. Beispielwerte: $\vartheta(10.2) = \log(2)+\log(3)+\log(5)+\log(7) = \log(2\cdot 3\cdot 5\cdot 7)$, $\vartheta(2)=\log(2)$.

11.7. Trivial: $\pi(x)\leq x$, $\vartheta(x)\leq x\log(x)$.
Abschätzungen nach unten sind hingegen nicht so leicht zu finden.

Die Definition von ψ benötigt die von-Mangoldt-Funktion Λ aus AnZ 2.4, definiert durch $\Lambda(n) := \log(p)$, falls $n=p^e$ für p prim, $e\geq 1$, und $\Lambda(n):=0$ sonst.

AnZ 11

11.8. **Faltungsformel für Λ:** $\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{d|n} \Lambda(d) = \log(n)$, Kurz: $\Lambda * \mathbb{1} = \log$

Wir hatten diese Formel schon in 5.12.

Zum **Beweis**: Für $n \overset{PFZ}{=} p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ gilt: l.S. $= \sum_{i=1}^{k} \sum_{\beta_i \leq \alpha_i} \log(p_i) = \sum_{i=1}^{k} \log(p_i^{\alpha_i}) = \log(n)$. $\square$

11.9 **Def.:** Sei $x \geq 2$ reell. Def. $\psi(x) := \sum_{p^k \leq x} \log(p) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$. Diese Funktion $\psi: \mathbb{R}_{\geq 2} \to \mathbb{R}$ heißt zweite Tschebyschev-Funktion.

11.10. **Beispielwerte:** $\psi(2) = \log(2)$, $\psi(12) = \underbrace{3\log(2)}_{\text{für } 2,4,8 \leq 12} + \underbrace{2\log(3)}_{\text{für } 3,9 \leq 12} + \log(5) + \log(7) + \log(11)$.

11.11. **Trivial:** $\psi(x) \leq x \log(x)$.

11.12. **Bem.:** • Die Bedeutung der PZFkt. ψ wird deutlich durch Satz 5.12, nämlich der Formel $\sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ für $\sigma > 1$.

• Die Funktion ψ ist die summatorische Fkt. der Koeffizientenfolge dieser Dirichletreihe. Analytische Eigenschaften der von der Dirichletreihe vermittelten Funktion, z.B. wo die Funktion Nst./Pole hat, ergeben Aussagen über ψ. Das werden wir noch präzisieren.

• Die Fktn. ϑ und ψ unterscheiden sich wenig voneinander, da die Primpotenzen $\leq x$, die keine Primzahlen sind, in $\psi(x)$ nur wenig beitragen:

11.13. **Satz:** $\psi(x) = \vartheta(x) + O(\sqrt{x}\log(x))$, (sogar $O(\sqrt{x})$, wenn der Satz von Tschebyschev 11.15(a) benutzt wird).

Bew.: Wir haben $\psi(x) - \vartheta(x) = \sum_{\substack{p^k \leq x \\ k \geq 2}} \log(p) = \sum_{p \leq \sqrt{x}} \log(p) \sum_{2 \leq k \leq \frac{\log(x)}{\log(p)}} 1$

$$\leq \sum_{p \leq \sqrt{x}} \log(p) \cdot \frac{\log(x)}{\log(p)} = \pi(\sqrt{x}) \log(x).$$

• Wird im letzten Schritt die triviale Absch. $\pi(\sqrt{x}) \leq \sqrt{x}$ verwendet, erhält man $\psi(x) - \vartheta(x) \ll \sqrt{x}\log(x)$.

• Wird der Satz von Tschebyschev 11.15(a) zuletzt benutzt, d.h. $\pi(\sqrt{x}) \ll \frac{\sqrt{x}}{\log(\sqrt{x})}$, erhält man $\psi(x) - \vartheta(x) \ll \sqrt{x}$. $\square$

Der Satz von Tschebyschev 11.15 liefert bereits die richtigen Größenordnungen für π, ϑ, ψ, nämlich $\frac{x}{\log(x)} \ll \pi(x) \ll \frac{x}{\log(x)}$, $x \ll \vartheta(x) \ll x$, $x \ll \psi(x) \ll x$.

Wir bringen hier einen Beweis des Satzes von Tschebyschev, benötigen dafür dieses

11.14. **Lemma:** $\sum_{d \le x} \Lambda(d) \lfloor \frac{x}{d} \rfloor = x\log(x) - x + 1 + R(x)$ mit $-\log(x) \le R(x) \le \log(x)$,
d.h. haben $R(x) = O(\log(x))$ mit impliziter Konstanten 1.

Bew.: $\sum_{d \le x} \Lambda(d) \lfloor \frac{x}{d} \rfloor = \sum_{d \le x} \Lambda(d) \sum_{\substack{n \le x \\ d \mid n}} 1 = \sum_{n \le x} \underbrace{\sum_{d \mid n} \Lambda(d)}_{\Lambda * 1 = \log} = \sum_{n \le x} \log(n) \overset{\text{P.Σ}}{=} \log(x) \sum_{n \le x} 1 - \int_1^x \frac{1}{t} \left(\sum_{k \le t} 1 \right) dt$

$= \lfloor x \rfloor \log x - \int_1^x \frac{\lfloor t \rfloor}{t} dt = \lfloor x \rfloor \log x - \int_1^x \frac{t - (t - \lfloor t \rfloor)}{t} dt = \lfloor x \rfloor \log x - x + 1 + \underbrace{\int_1^x \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t} dt}_{0 \le '' \le \int_1^x dt/t = \log(x)}$

$= x \log x - x + 1 - \underbrace{(x - \lfloor x \rfloor)}_{\in [0,1[} \log x + \int_1^x \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t} dt.$ $\square$

11.15. **Satz** (von Tschebyschev): (← hier oft mit "Tsch." abgekürzt)

(a) $\exists C_1 < C_2 : \forall x \ge 2 : C_1 \frac{x}{\log(x)} \le \pi(x) \le C_2 \frac{x}{\log(x)}$ $\iff$ $\frac{x}{\log(x)} \ll \pi(x) \ll \frac{x}{\log(x)}$.

(b) $\exists C_3 < C_4 : \forall x \ge 2 : C_3 x \le \psi(x) \le C_4 x$ $\iff$ $x \ll \psi(x) \ll x$.

(c) $\exists C_5 < C_6 : \forall x \ge 2 : C_5 x \le \vartheta(x) \le C_6 x$ $\iff$ $x \ll \vartheta(x) \ll x$.

11.16. **Bem.:** • Wir zeigen (b) mit den Konstanten $C_4 = \log(4)$ und $C_3 = \frac{1}{\log(4)}$ für $x \ge x_0$.
• Bekannte numerische Schranken [Rosser & Schoenfeld] für ϑ, π, ψ lauten:

1) $\vartheta(x) < 1.000081\, x$, $x > 0$

2) $\vartheta(x) > 0.75\, x$, $x \ge 36$

3) $\frac{x}{\log x} \le \pi(x) \le \frac{1.25506\, x}{\log x}$, u.S.: $x \ge 17$, o.S.: $x > 1$

4) $|\vartheta(x) - x| < \frac{8.686\, x}{\log^2 x}$, $x > 1$

5) ↑ ebenso für ψ

11.17. **Bew.:** 1.) Beh.: Alle drei Aussagen sind äquivalent: (a) $\iff$ (b) $\iff$ (c).

Bew. der 1. Beh.: • "(b) $\iff$ (c)" ist klar mit 11.13. in der Form
$\psi(x) = \vartheta(x) + O(\sqrt{x} \log(x))$, weil $\sqrt{x} \log(x) = o(x)$.

• "(a) $\Rightarrow$ (c)" klar wegen $\vartheta(x) = \sum_{p \le x} 1 \cdot \log p \overset{\text{P.Σ}}{=} \pi(x) \cdot \log(x) - \int_2^x \pi(t) \frac{dt}{t}$,
mit (a) ist dann $\pi(x) \cdot \log(x) \underset{\gg x}{\ll x}$, und $\int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt \ll \int_2^x \frac{dt}{\log(t)} = \int_2^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\log(t)} + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{dt}{\log(t)} \ll \sqrt{x} + \frac{x}{\log(x)}$.

↖ Trick: bei $\sqrt{x}$ aufspalten $\rightsquigarrow \log(t) \ge \log(\sqrt{x})$

• "(c) $\Rightarrow$ (a)": gilt wegen

$$\pi(x) = \sum_{p \le x} \frac{\log(p)}{\log(p)} \overset{\text{P.Σ}}{=} \vartheta(x) \cdot \frac{1}{\log(x)} + \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t \log^2(t)} dt,$$

mit (c) ist $\frac{\vartheta(x)}{\log(x)} \ll \frac{x}{\log(x)}$, auch $\gg \frac{x}{\log(x)}$,
und $\int_2^x \frac{dt}{(\log(t))^2} = \int_2^{\sqrt{x}} \frac{dt}{(\log(t))^2} + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{dt}{(\log(t))^2} \le \sqrt{x} + x \cdot \frac{1}{(\log\sqrt{x})^2} \ll \frac{x}{\log^2(x)} = o\left(\frac{x}{\log(x)}\right)$.

↑ gleicher Trick

$\square$ (1.) Beh.)

Nach 1.) Beh. gen. z.z.: (a), (b) oder (c). Wir zeigen die obere Schranke für ϑ (also dann auch für ψ wegen 11.13.); und die untere Schranke für ψ, also insg. (c). Dies folgt einem allgemeinen Prinzip, dass Aussagen über ψ bzw. ϑ leichter zu zeigen sind (und dann durch part. Σ die ϑ-Aussage zu einer Aussage über π überführt werden kann, wie oben bei "(c) ⇒ (a)" gemacht).

2.) Beh.: $\forall x \geq 2: \ \vartheta(x) \leq (\log(4)) \cdot x$, d.h. $C_4 = \log(4) \approx 1.3863$.

Bew.: Betr. den im Pascalschen △ "mittleren" Binomialkoeff. $B_n := \binom{2n+1}{n} = \frac{(2n+1)!}{n!\,(n+1)!}$

• Haben $2B_n < \sum_{j=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{j} \cdot 1^j \cdot 1^{2n+1-j} = (1+1)^{2n+1} = 4^n \cdot 2$, also $B_n < 4^n$ (1)

$B_n = \binom{2n+1}{n} = \binom{2n}{n-1} + \binom{2n}{n} < \binom{2n}{n-2} + \binom{2n}{n-1} + \binom{2n}{n} + \binom{2n}{n+1} = \binom{2n+1}{n-1} + \binom{2n+1}{n+1}$.

• Obere Absch. von ϑ: Sei $P_n := \prod_{n+1 < p \leq 2n+1} p$.

Jede PZ $p \mid P_n$ teilt den Zähler $(2n+1)!$ von B_n, nicht aber den Nenner $n!\,(n+1)!$.
Haben also $P_n \mid B_n$, insb. $P_n \leq B_n$ (2).
Mit $P_n = \exp\left(\log\left(\prod_p p\right)\right) = \exp\left(\sum_p \log(p)\right) = \exp\left(\vartheta(2n+1) - \vartheta(n+1)\right)$
folgt

$$\vartheta(2n+1) - \vartheta(n+1) = \log(P_n) \overset{(2)}{\leq} \log(B_n) \overset{(1)}{<} n \log(4)$$

Gilt $\vartheta(n+1) \leq n \log(4)$, folgt somit $\vartheta(2n+1) \leq 2n \log(4)$,
also induktiv $\vartheta(x) \leq (x-1)\log(4)$ für alle ungeraden x. Ist x gerade, folgt ebenso $\vartheta(x) = \vartheta(x-1) \leq (x-1)\log(4) \leq x \log(4)$. (Beh. ✓ für $x = 1, 2, 3$.)
Ist $x \notin \mathbb{Z}$, folgt $\vartheta(x) = \vartheta(\lfloor x \rfloor) \leq \lfloor x \rfloor \log(4) \leq x \log(4)$.

□ (2.) Beh.)

3.) Beh.: $\forall x \geq x_0: \ \psi(x) \geq \frac{1}{\log(4)} \cdot x$, d.h. $C_3 = \frac{1}{\log(4)}$, mit x_0 explizit berechenbar.

Bew.: Betr. $f(x) := \lfloor x \rfloor - \lfloor \frac{x}{2} \rfloor - \lfloor \frac{x}{3} \rfloor - \lfloor \frac{x}{5} \rfloor + \lfloor \frac{x}{30} \rfloor$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$.

• f ist periodisch mit Periode 30: $f(x+30) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$,
denn $\lfloor x+30 \rfloor - \lfloor \frac{x}{2} + 15 \rfloor - \lfloor \frac{x}{3} + 10 \rfloor - \lfloor \frac{x}{5} + 6 \rfloor + \lfloor \frac{x}{30} + 1 \rfloor = f(x) + 30 - 15 - 10 - 6 + 1 = f(x)$.
$\lfloor x+m \rfloor = \lfloor x \rfloor + m$

• $f(30-x) = 1 - f(x)$ für $x \notin \mathbb{Z}$,
denn $\lfloor 30-x \rfloor - \lfloor 15 - \frac{x}{2} \rfloor - \lfloor 10 - \frac{x}{3} \rfloor - \lfloor 6 - \frac{x}{5} \rfloor + \lfloor 1 - \frac{x}{30} \rfloor = f(-x) = -f(x) \overbrace{-1+1+1+1-1}^{=1}$.
$\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor - 1$ für $x \notin \mathbb{Z}$

- f hat auf $[1,15[$ nur die Werte $f(x) \in \{0,1\}$.

[Tabellarisch: $x \in [1,2[\Rightarrow f(x)=1$, $x\in[2,3[\Rightarrow f(x) = 2-1=1$, ..., $x \in [14,15[\Rightarrow f(x) = \underbrace{14-7-4-2}_{=1}$.]

- Fazit: $f(x) \in \{0,1\}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

- Also: $\psi(x) \geq \sum_{n\leq x} \Lambda(n) \underbrace{f\left(\tfrac{x}{n}\right)}_{\in\{0,1\}} = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \cdot \left(\lfloor \tfrac{x}{n} \rfloor - \lfloor \tfrac{x}{2n} \rfloor - \lfloor \tfrac{x}{3n} \rfloor - \lfloor \tfrac{x}{5n} \rfloor + \lfloor \tfrac{x}{30n} \rfloor \right)$

$$= \sum_{n\leq x} \Lambda(n) \lfloor \tfrac{x}{n} \rfloor - \sum_{n \leq x/2} \Lambda(n) \lfloor \tfrac{x}{2n} \rfloor - \sum_{n\leq x/3} \Lambda(n) \lfloor \tfrac{x}{3n} \rfloor - \sum_{n \leq x/5} \Lambda(n) \lfloor \tfrac{x}{5n} \rfloor + \sum_{n\leq x/30} \Lambda(n) \lfloor \tfrac{x}{30n} \rfloor.$$

[$\lfloor \tfrac{x}{kn} \rfloor = 0$ für $n > \tfrac{x}{k}$]

- Mit Lemma 11.14 $\left(\sum_{d\leq x} \Lambda(d) \lfloor \tfrac{x}{d} \rfloor = x\log(x) - x + 1 + \underbrace{R(x)}_{\in[-\log(x),\, \log(x)]} \right)$

folgt $\psi(x) \geq x \log x - x + 1 - \log x - \left(\tfrac{x}{2} \log\left(\tfrac{x}{2}\right) - \tfrac{x}{2} + 1 + \log\left(\tfrac{x}{2}\right) \right)$

$- \left(\tfrac{x}{3} \log\left(\tfrac{x}{3}\right) - \tfrac{x}{3} + 1 + \log\left(\tfrac{x}{3}\right)\right) - \left(\tfrac{x}{5} \log\left(\tfrac{x}{5}\right) - \tfrac{x}{5} + 1 + \log\left(\tfrac{x}{5}\right) \right) + \left(\tfrac{x}{30} \log\left(\tfrac{x}{30}\right) - \tfrac{x}{30} + 1 - \log\left(\tfrac{x}{30}\right) \right)$

$= x \underbrace{\log\left(2^{7/15}\, 3^{3/10}\, 5^{1/6}\right)}_{\approx 0.921} - 5\log(x) + \log(30) - 1.$

($\frac{1}{\log(4)} \approx 0.7213$) Nun ist dies $\geq \frac{1}{\log(4)} x$, sobald x so groß (d.h. x mind. ein x_0), so dass $5 \log(x) \underbrace{- \log(30) + 1}_{\approx -2.4} \leq x \cdot (0.921 - 0.721)$. □

11.18. Kor.: Bertrands Postulat: Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann $\exists p: \; n < p \leq 2n$.

Bew.: OK für $n \geq \tilde{x}_0$: Wir haben $\sum_{n<p\leq 2n} \log(p) = \vartheta(2n) - \vartheta(n) \geq n \underbrace{\left(\tfrac{2}{\log(4)} - \log(4) \right)}_{\approx 0.056 > 0}$,

denn wegen $\vartheta(x) + \pi(\sqrt{x}) \log x \geq \psi(x)$, vgl. 11.13, folgt $\vartheta(x) \geq \frac{x}{\log 4}$, $x \geq \tilde{x}_0$.
Man kann $\tilde{x}_0$ explizit berechnen und Bertrands Postulat für $n \leq \tilde{x}_0$ numerisch überprüfen. □

11.19. Bekanntes Zitat (von N.J. Fine, nicht von Erdős):

"Chebyshev said it, and I'll say it again,
there's always a prime between n and $2n$."