# Vorlesung Analytische Zahlentheorie

SoSe '22, hhu
K. Halupczok

## AnZ10: Die Riemannsche Zetafunktion

Stichworte: $\zeta$ als meromorphe Funktion auf $\sigma > 0$, Pol bei $s=1$ vom Residuum 1, Divergenz der $\zeta$-Reihe in jedem $1+it$

10.1. Einleitung: Durch eine Fortsetzung kann die Dirichletreihe $\sum_{n \geq 1} n^{-s}$ zu einer in $\sigma>0$ meromorphen Funktion $\zeta$ ausgeweitet werden, holomorph in $\sigma>0$ bis auf den Pol bei $s=1$, den es aufgrund des Satzes von Landau, Satz 7.2, geben muss.

10.2. Satz: Die Funktion $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ ist in die Halbebene $\{\sigma > 0\}$ holomorph/analytisch fortsetzbar. Für $\sigma > 0$ gilt

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} - s\int_1^\infty P_0(t)\, t^{-s-1}\, dt.$$

Dabei ist $P_0(t) = t - \lfloor t \rfloor - \frac{1}{2}$ die Sägezahnkurve aus AnZ3, Satz 3.24.
($P_0$ ist 1-periodisch mit $-\frac{1}{2} \leq P_0(t) \leq \frac{1}{2}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.)

10.3. Bem.: • Anders ausgedrückt besagt der Satz, dass $\zeta(s)$ in die Halbebene $\{\sigma>0\}$ bis auf einen Pol 1. Ordnung mit Residuum 1 bei $s=1$ holomorph fortgesetzt werden kann, ablesbar an

$$\zeta(s) = \frac{1}{(s-1)^1} + \text{Holomorphes}.$$

• Im Prinzip können auch numerische Werte für $\zeta$ in $\{0<\sigma\leq 1\}$ mit dem Satz berechnet werden.

10.4. Bew. (von 10.2): Für $M \in \mathbb{N}$, $\sigma > 1$, zeigt partielle Summation
[Satz 3.21(2) mit $a_n = 1$, $f(n) = n^{-s}$, $c=1$, $x=M$]

$$\sum_{n\leq M} \frac{1}{n^s} = M \cdot M^{-s} + s\int_1^M \lfloor t \rfloor \cdot t^{-s-1}\, dt$$

$$= M^{1-s} - s\int_1^M P_0(t)\, t^{-s-1}\, dt + s\int_1^M \left(t - \tfrac{1}{2}\right) t^{-s-1}\, dt$$

$$= \frac{1}{s-1} - s\int_1^M P_0(t)\, t^{-s-1}\, dt + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}M^{-s} - \frac{M^{1-s}}{s-1}.$$

Für $\sigma > 1$ gehen bei $M \to \infty$ die letzten beiden Terme gegen 0, man erhält die behauptete Formel. Dabei gilt zu beachten:

1.) Wegen $|P_0(t)| \le \frac{1}{2}$ konvergiert das uneigentliche Integral

$\int_1^\infty P_0(t) t^{-s-1}\, dt$ kompakt für $\sigma > 0$ und stellt dort eine holomorphe Funktion dar, und beschreibt somit die behauptete holomorphe Fortsetzung von $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ in die Halbebene $\{\sigma > 0\}$.

2.) Zur kompakten Konvergenz im Detail: Man betrachtet $\int_1^\infty P_0(t) t^{-s-1} dt$
$= \sum_{m=1}^\infty \underbrace{\int_m^{m+1} P_0(t) t^{-s-1} dt}_{=: f_m(s)}$, die Funktionen $f_m(s)$ sind holomorph auf $\mathbb{C}$, s. 3.)

Weiter gilt für $\sigma > 0$: $\left| \sum_{m=M}^N f_m(s) \right| \le \sum_{m=M}^N \int_m^{m+1} t^{-\sigma-1} dt \le \int_M^{N+1} t^{-\sigma-1} dt$

$$= \frac{1}{-\sigma} \cdot t^{-\sigma} \Big|_M^{N+1} \le \frac{1}{\sigma} \cdot M^{-\sigma} \quad \left( \le \frac{1}{\sigma} \right),$$

auf $\sigma \ge \sigma_0 > 0$ folgt also $\left| \sum_{m=M}^N f_m(s) \right| \le \frac{1}{\sigma_0} \cdot M^{-\sigma_0}$, so dass $\sum_{m=1}^\infty f_m(s)$ also gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $\{\sigma > 0\}$ konvergiert.
(Kompakte Konvergenz ist äquivalent zur lokal gleichmäßigen Konvergenz.)
Nach dem Konvergenzsatz von Weierstraß 4.5 ist also die Grenzfunktion $\int_1^\infty P_0(t) t^{-s-1} dt$ holomorph auf $\{\sigma > 0\}$.

3.) Zur Holomorphie von $f_m(s)$: Es ist $f_m(s) = \int_m^{m+1} \frac{t - m - \frac{1}{2}}{t^{s+1}} dt$

$$= \int_m^{m+1} t^{-s} dt - \int_m^{m+1} \frac{m + 1/2}{t^{s+1}} dt,$$ für $s \neq 1$ mit $\sigma > 0$ folgt also

$$f_m(s) = \frac{1}{-s+1} \cdot t^{-s+1} \Big|_m^{m+1} - \left(m + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{-s} t^{-s} \Big|_m^{m+1}$$

$$= \frac{1}{s-1} \left( \frac{1}{m^{s-1}} - \frac{1}{(m+1)^{s-1}} \right) + \frac{m + 1/2}{s} \left( \frac{1}{(m+1)^{s+1}} - \frac{1}{m^s} \right),$$

eine in $\sigma > 0$ holomorphe Funktion bis auf einen möglichen Pol bei $s = 1$.
Da $\sum_{m=1}^\infty f_m(s) = \int_1^\infty P_0(t) t^{-s-1} dt$ bei $s = 1$ stetig ist (der Integrand ist beschränkt), ist $f_m$ auch bei $s = 1$ holomorph. $\square$

10.5 Alternativer Beweis von Satz 10.2:

Mit der Eulerschen Summenformel, Satz 3.24, mit $\sigma>1$ und $\varepsilon>0$ beliebig klein angewendet für $c=1-\varepsilon$, $x\to\infty$, finden wir

$$\zeta(s)=\sum_{n\geq 1} n^{-s}=\int_{1-\varepsilon}^{\infty} u^{-s}\,du-s\int_{1-\varepsilon}^{\infty} P_0(u)\,u^{-s-1}\,du+(1-\varepsilon)^{-s}P_0(1-\varepsilon)$$

$$\overset{\varepsilon\to 0}{=}\int_1^{\infty} u^{-s}\,du-s\int_1^{\infty} P_0(u)\,u^{-s-1}\,du+\frac{1}{2}=\frac{1}{s-1}-s\int_1^{\infty}\frac{u-\lfloor u\rfloor-\frac{1}{2}}{u^{s+1}}\,du+\frac{1}{2}.$$

Die Überlegung im ersten Beweis,
dass $s\int_1^{\infty}\frac{u-\lfloor u\rfloor-\frac{1}{2}}{u^{s+1}}\,du$ eine in $\sigma>0$ holomorphe Fkt. darstellt,
bleibt aber gleich. □

10.6. Bem.: Außer der hier gezeigten Fortsetzung von $\zeta$ in $\{0<\sigma\leq 1\}$ sind auch noch andere Darstellungen der $\zeta$-Fortsetzung möglich, eine davon in der Ü, Bl.6, A3.
Natürlich müssen diese Darstellungen übereinstimmen – sie stellen ja $\zeta$ dar.

10.7. Def.: Der gewonnene Fortsetzungsbereich $0<\sigma\leq 1$ heißt kritischer Streifen der Zetafunktion.

10.8. Bem.: • Mit der Formel von Satz 10.2 werden (außer $s=1$) die Werte von $\zeta(s)$ im Streifen $\{s\in\mathbb{C};\ 0<\sigma\leq 1\}$ fortgesetzt, d.h. wir definieren

$$\zeta(s):=\begin{cases}\sum_{n\geq 1} n^{-s}, & \text{falls } \sigma>1,\\[1ex] \frac{1}{s-1}+\frac{1}{2}-s\int_1^{\infty}P_0(t)\,t^{-s-1}\,dt, & \text{falls } 0<\sigma\leq 1,\ s\neq 1.\end{cases}$$

(Die Darstellung von Satz 10.2 gilt aber auch für ganz $\sigma>0$.)

• Es ist so aber nicht geklärt, ob die Reihe $\sum_{n\geq 1} n^{-s}$ für $s=1+it$, $t\neq 0$, vielleicht noch irgendwo konvergiert oder nicht.

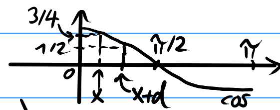
Die Konvergenz der Reihe $\sum_{n\geq 1} n^{-s}$ auf der Geraden $\{\sigma=1\}=\{s=1+it;\ t\in\mathbb{R}\}$ kann aber wie folgt ausgeschlossen werden.

10.9. **Satz:** Die Reihe $\sum_{n\geq 1} n^{-s}$ divergiert in jedem Punkt $s=1+it$, $t\in\mathbb{R}$.

**Bew.:** Für $t=0$ ist die Beh. bekannt, sei zunächst $t>0$.

Seien $x,d\in\mathbb{R}$ mit $0<x<x+d<\frac{\pi}{2}$, $\cos(x)=\frac{3}{4}$ und $\cos(x+d)=\frac{1}{2}$.

Sei weiter $\varepsilon_0>0$ mit $t\log(1+\varepsilon_0)<d$ fest gewählt.
[$\Leftrightarrow \varepsilon_0 < e^{d/t}-1$]




1.) **Beh.:** $\forall n>\frac{t}{x}$: $t\log(n+1)-t\log(n)<x$.

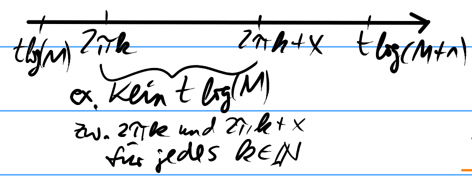
($1+z\leq e^z$ für $z>0$)

**Bew.:** Haben $\log(n+1)-\log(n)=\log(1+\frac{1}{n})\leq\frac{1}{n}<\frac{x}{t}$. □

2.) **Beh.:** $\forall M_0\in\mathbb{N}\ \exists M>M_0\ \exists k\in\mathbb{N}$: $t\log(M)\in\,]2\pi k, 2\pi k+x[$,

d.h. es ex. beliebig große $M$, sodass $t\log(M)$ in einem IV der angegebenen Form "nahe" $2\pi k$ liegt.

**Bew.:** Sonst: (für $M$ hinr. groß)




$\exists M_0\ \forall M\geq M_0\ \forall k$: $t\log(M)\notin\,]2\pi k, 2\pi k+x[$ $\rightarrow$ auch $t\log(M+1)\notin\,]\dots[$

dann wäre $t\log(M+1)-t\log(M)\geq x$, ↯ zu 1.) □

3.) **Beh.:** $\forall n$ mit $M\leq n<(1+\varepsilon_0)M$: $2\pi k < t\log(n) < 2\pi k + x + d$,

d.h. für $M$ wie in 2.) und $n$ nahe $M$ ist $t\log(n)\in\,]2\pi k, 2\pi k+\underbrace{x+d}_{<\pi/2}[$.

**Bew.:** $t\log(n)\geq t\log(M)>2\pi k$

und $t\log(n)<t\log((1+\varepsilon_0)M)=\underbrace{t\log(1+\varepsilon_0)}_{<d \text{ nach Wahl von } \varepsilon_0}+\underbrace{t\log M}_{<2\pi k+x \text{ nach } 2.)}<d+2\pi k+x$. □

4.) Es folgt $\frac{1}{2}\leq\cos(t\log(n))$ für die $n$ in 3.) und $M$ aus 2.), die $M$ bel. groß.

Es gilt demnach $\left|\sum_{M\leq n<(1+\varepsilon_0)M}\frac{1}{n^{1+it}}\right|\geq \mathrm{Re}(\sum\dots)=\sum_{n\dots} n^{-1}\cdot\underbrace{\cos(t\log n)}_{\geq 1/2}$

$\geq \underbrace{\varepsilon_0 M}_{\#\text{der } n}\cdot\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\frac{1}{(1+\varepsilon_0)M}}_{\text{da } n\leq(1+\varepsilon_0)M}=\frac{\varepsilon_0}{2(1+\varepsilon_0)}>0$. Somit liegt keine (Cauchy-) Konvergenz vor.

5.) Die gleiche Argumentation zeigt die Beh für $t<0$, da $\cos(t\log(n))=\cos(-t\log(n))$. □