Vorlesung Analytische Zahlentheorie

SoSe '22, hhu
K. Halupczok

AnZ 1: Anfänge der Analytischen Zahlentheorie

Stichworte: Potenzreihen als kombinatorisches Werkzeug, erzeugende Funktion, Eulers analytischer Beweis von $\#\mathbb{P}=\infty$, harmonische Reihe, quantitative Formulierung von $\#\mathbb{P}=\infty$ durch Abschätzung von $\sum_{p\leq x}\frac{1}{p}$

TEIL I: Die Riemannsche Zetafunktion:

Kapitel AnZ 1 bis AnZ 22

1.1. Einleitung: Zum Einstieg zeigen wir, dass analytische Methoden in kombinatorischen Fragestellungen eingesetzt werden können.

1.2. Analytische Motivation: Potenzreihen werden in Analysis I+II und Funktionentheorie studiert. Mit ihnen sind Rückschlüsse auf kombinatorische Fragestellungen möglich.

Die Fibonacci-Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen wird etwa definiert durch die Rekursion

$$\underbrace{f_1:=1,\quad f_2:=1,}_{\text{Anfangswerte}}\qquad f_{n+2}:=f_{n+1}+f_n \text{ für } n\geq 1,$$

also $f_3=2,\ f_4=3,\ f_5=5,\ f_6=8,\ f_7=13,\dots$

Wie kann eine explizite Formel für diese Zahlen gefunden werden, mit der z.B. leicht f_{1000} berechnet werden kann? Gehen wir mit analytischen Methoden vor: Wir bilden die erzeugende Potenzreihe

$$F(z):=\sum_{k=0}^{\infty} f_{k+1} z^k, \quad \text{sagen wir für } z\in\mathbb{C},$$

diese konvergiert wegen $\frac{f_{k+1}}{f_k}\leq 2$ wenigstens für $|z|<\frac{1}{2}$.

Aus der Rekursionsformel schließt man

$$F(z)-zF(z)-z^2F(z)=1 \quad \text{(durch Indexverschiebung)},$$

also ist $$F(z)=\frac{-1}{z^2+z-1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{1}{z-z_2}-\frac{1}{z-z_1}\right),$$

wo $$z_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\quad z_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ ist.}$$

Durch Entwickeln der Ausdrücke $\frac{1}{z-z_2}, \frac{1}{z-z_1}$ in geometrische Reihen,

also $\frac{1}{z-z_2} = \frac{1/z_2}{z/z_2-1} = -\left(\frac{1}{z_2}\right)\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{z_2}} = -\frac{1}{z_2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{z_2}\right)^k \underset{\frac{1}{z_2}=-z_1}{=} -\sum_{k=0}^{\infty}(-z_1)^{k+1} z^k$,

sowie analog $\frac{1}{z-z_1} = \frac{1/z_1}{z/z_1-1} = -\left(\frac{1}{z_1}\right)\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{z_1}} = -\frac{1}{z_1}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{z_1}\right)^k \underset{\frac{1}{z_1}=-z_2}{=} -\sum_{k=0}^{\infty}(-z_2)^{k+1} z^k$

folgt $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\underbrace{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}_{-z_2}\right)^{k+1} - \left(\underbrace{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}_{-z_1}\right)^{k+1}\right) z^k$.

Der Identitätssatz für Potenzreihen zeigt, dass die Koeffizienten dieser Reihe mit den f_{k+1} übereinstimmt, man erhält die Binetsche Formel

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

als explizite Formel zur Berechnung der Fibonaccizahlen.

Wegen $-1 < \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ werden die Potenzen $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ schnell sehr klein, also ist $f_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$, also z.B. $f_{20} \approx 6765$ (laut Taschenrechner).

Da $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{20} > 0$ sehr klein, folgt $f_{20} = 6765$.

Sehr deutlich wird so mit $f_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\exp\left(n\cdot\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)$ das exponentielle Wachstum der Fibonaccifolge mit Wachstumsrate $\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \approx 0.4812$.

1.3. Während Potenzreihen hauptsächlich bei sogenannten <u>additiven</u> Fragestellungen (Partitionen, Rekursionen, ...) benutzt werden, nimmt man bei <u>zahlentheoretischen Funktionen</u> mit Faltungseigenschaften als erzeugende Funktionen eher die zugeordnete <u>Dirichletreihe</u>. Aus der Fülle der entstehenden Fragestellungen werden in dieser Vorlesung vor allem Fragen über Primzahlen behandelt werden.

Solche Reihen der Form $\sum_n f(n) n^{-s}$ werden etwa seit <u>Euler</u> verwendet.

Das obige Beispiel erläutert die prinzipielle Herangehensweise:

1. zahlentheoretische Funktion f (oben: Fibonacci-Folge)
2. erzeugende Funktion F (oben: erzeugende Potenzreihe)
3. Studium der analytischen Eigenschaften von F
4. Rückschluss von F auf f (oben: Identitätssatz)

1.4. **Initialzündung durch Euler:**

Sei $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen, also $\mathbb{P}=\{2,3,5,7,11,13,\dots\}$.
Der Buchstabe p wird (fast ausschließlich) für Primzahlen benutzt.
Eine Primzahl p ist eine natürliche Zahl mit genau 2 natürlichen Teilern,
d.h. $p>1$ prim $:\Leftrightarrow (\underset{\smile}{d|p} \Rightarrow d=1 \vee d=p)$

d teilt p, d.h. $\exists\, a\in\mathbb{N}: da=p$.

Sei nun zunächst $s\in\mathbb{R}$ eine beliebige reelle Variable, und $x\in\mathbb{R}$, $x\geq 2$.
Dann studierte Euler das Produkt

$$(1)\quad \prod_{p\leq x}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \prod_{p\leq x}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p^{ks}}\right) \overset{\text{Eind. PFZ/HS der Arithmetik}}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}_x}\frac{1}{n^s} = \sum_{n\leq x}\frac{1}{n^s} + \sum_{\substack{n>x\\ n\in\mathbb{N}_x}}\frac{1}{n^s},$$

endliches Produkt!

wo $\mathbb{N}_x := \{n\in\mathbb{N};\ n \text{ hat nur Primteiler} \leq x\}$.

Konvergenz noch vage bei Euler

Für festes $s>1$ konvergiert die rechte Seite für $x\to\infty$ gegen die Funktion
$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$,
also konvergiert auch die linke Seite (der Limes sei mit $\prod_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$ bezeichnet),
so gilt also

$$(2)\quad \prod_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s},\quad s>1.$$

(von Konvergenzfragen abgesehen)

1.5. **Beobachtung:** Dies sagt etwas über $\mathbb{P}$ aus!

1.) Aus (2) folgt: $\mathbb{P}$ ist unendlich!

Bew.: Ann., $\mathbb{P}$ endlich. Dann ex. für l.S. der Limes für $s\to 1$.
Dann ist aber $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\leq C$ für alle $s>1$ mit einer Konstanten $C>0$,
also $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}\leq C$ für jedes $N\in\mathbb{N}$, alle $s>1$ $\overset{\text{Stetigkeit}}{\Longrightarrow}$ $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\leq C$ für jedes N,
dann wäre die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ konvergent, Widerspruch ↯! □

2.) Aus (1) für $s=1$ folgt

$$\prod_{p\leq x}\frac{1}{1-\frac{1}{p}} \geq \sum_{n\leq x}\frac{1}{n} > \underbrace{\int_1^x \frac{1}{t}\,dt}_{=\int_1^2+\int_2^3+\dots < \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{[x]}} = \log x \xrightarrow{x\to\infty}\infty,$$

also muss $\mathbb{P}$ unendlich groß sein!

[Erinnerung: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}_{>2\cdot\frac{1}{4}}+\underbrace{\left(\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{8}\right)}_{>4\cdot\frac{1}{8}}+\underbrace{\left(\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{16}\right)}_{>8\cdot\frac{1}{16}}+\dots > 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\dots \to\infty$ divergiert]

3.) Die "Herangehensweise" des Fibonacci-Beispiels kann wiedergefunden werden: In (1) kommt $\sum_{n\in\mathbb{N}_x} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{1}_{\mathbb{N}_x}(n)}{n^s}$ vor mit der charakteristischen Funktion $\mathbb{1}_{\mathbb{N}_x}$ von $\mathbb{N}_x$, die definiert ist als $\mathbb{1}_{\mathbb{N}_x}(n) := \begin{cases} 1, & \text{falls } n\in\mathbb{N}_x, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

Diese kann als "zahlentheoretische" Funktion bezeichnet werden, da $\mathbb{N}_x$ über den Primteilerbegriff definiert ist. Die Divergenz der Funktion $\sum_{n\in\mathbb{N}_x}\frac{1}{n^s}$ erlaubt nun Rückschlüsse über $\mathbb{N}_x$ bzw. $\mathbb{P}$.

1.6. Wie kann nun eine "quantitative" Formulierung der Unendlichkeit von $\mathbb{P}$ gegeben werden?

Nehmen wir den natürlichen Logarithmus von 2.), also

$$-\sum_{p\le x}\log\left(1-\frac{1}{p}\right) > \log(\log x),$$

mit der Logarithmusreihe $-\log(1-t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k}$ für $|t|<1$ erhalten wir $-\sum_{p\le x}\log\left(1-\frac{1}{p}\right)$

$$= \sum_{p\le x}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{kp^k} = \sum_{p\le x}\frac{1}{p} + C$$

mit $C = \sum_{p\le x}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{kp^k} \le \frac{1}{2}\sum_{p\le x}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{p^k} = \frac{1}{2}\sum_{p\le x}\frac{1}{p^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p^k} = \frac{1}{2}\sum_{p\le x}\frac{1}{p^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{p}}$

$$= \frac{1}{2}\sum_{p\le x}\frac{1}{p(p-1)} < \frac{1}{2}\sum_{m=2}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{m(m-1)}}_{=\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m}\text{, Teleskopreihe }=1} = \frac{1}{2}.$$

Also:

1.7. <u>Satz</u>: Für $x\ge 2$ gilt $\sum_{p\le x}\frac{1}{p} > \log\log x - \frac{1}{2}$, da $\log\log x \xrightarrow{x\to\infty} \infty$, es folgt insbesondere $\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p}=\infty$.

Dieser Satz liefert noch keine sehr befriedigende Antwort auf Frage 1.6! (Vgl. mit Euklid in EZ 2.6?)

1.8. <u>Notationen</u>: p prim, p Pz : p ist Primzahl, $\mathbb{P}=\{p;\ p \text{ Pz}\}$, l.S. = linke Seite, r.S. = rechte Seite (einer Gleichung/Formel), $\log=\ln$, $d, k, l, m, n, r\in\mathbb{N}$. Weitere Variablen werden je nach Vorkommen spezifiziert.