Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Jun.-Prof. Dr. Holger Kammeyer
M.Sc. Thor Wittich

Topologie II, SoSe 23
Blatt 6

Aufgabe 1:

(i) Begründen Sie, dass das universelle Koeffiziententheorem ein Spezialfall des Künneth-Theorems ist.

(ii) Zeigen Sie die Formel $H_n(X \times Y; R) \cong \bigoplus_{i=0}^{n} H_i(X; H_{n-i}(Y; R))$ für alle Ringe R und topologischen Räume X und Y.

Aufgabe 2:
Wir betrachten die Abbildung $f\colon \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to S^2$, welche die das 1-Skelett auf einen Punkt zusammenschlägt.

(i) Zeigen Sie, dass $f_*\colon H_2(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2) \to H_2(S^2; \mathbb{F}_2)$ ein Isomorphismus ist.

(ii) Folgern Sie aus dem vorherigen Aufgabenteil, dass die Spaltung aus dem universellen Koeffiziententheorem nicht natürlich ist (und somit auch die Spaltung aus dem Künneth-Theorem nicht natürlich ist).

Aufgabe 3:
Berechnen Sie die Homologie folgender Räume mit Hilfe des Künneth-Theorems:

(i) $H_*(T^n)$

(ii) $H_*(X \times S^n)$ für jeden topologischen Raum X

(iii) $H_*(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^m(\mathbb{R}))$

Was passiert in Teil (iii) wenn wir uns Homologie mit Koeffizienten in $\mathbb{F}_2$ anschauen?

Aufgabe 4:
Sind (X, x_0) und (Y, y_0) zwei punktierte topologische Räume, so lässt sich deren Koprodukt $X \vee Y$ mit $X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y$ identifizieren und wir erhalten so eine abgeschlossene Kofaserung $X \vee Y \rightarrowtail X \times Y$ mit zugehörigem Quotienten $X \wedge Y = X \times Y / X \vee Y$.

(i) Zeigen Sie, dass wir auch ein Künneth-Theorem für $H_n(X \wedge Y; R)$ haben.

(ii) Weisen Sie nach, dass $X \wedge S^1$ genau mit der Einhängung von X übereinstimmt und folgern Sie dann aus Aufgabenteil (i) den Einhängungsisomorphismus.