Heinrich Heine
Universität
Düsseldorf

Jun.-Prof. Dr. Holger Kammeyer
M.Sc. Thor Wittich

Topologie II, SoSe 23
Blatt 5

Aufgabe 1:
Zeigen Sie, dass die beiden Abbildungen aus Satz I.8.9 wohldefiniert sind, also jeweis in die angegebenen Hom-Mengen abbilden.

Aufgabe 2: In dieser Aufgabe wollen wir injektive abelsche Gruppen charakterisieren.

(i) Zeigen Sie kurz, dass injektive abelsche Gruppen stets divisibel sind.

(ii) Sei nun I eine injektive abelsche Gruppe. Zu zwei gegebenen abelschen Gruppen A und C mit $A \subset C$ und einem Homomorphismus $\psi\colon A \to I$ betrachten wir die Menge Φ der Paare von abelschen Gruppen B und Homomorphismen $\varphi\colon B \to I$, wobei $A \subset B \subset C$ und $\varphi|_A = \psi$. Auf dieser Menge definieren wir nun wie folgt eine Ordnungsrelation:

$$(B, \varphi) \leq (B', \varphi'), \text{ falls } B \subset B' \text{ und } \varphi'|_B = \varphi$$

Zeigen Sie mit Hilfe von Zorns Lemma, dass Φ ein maximales Element besitzt.

(iii) Weisen Sie nach, dass das von Ihnen gefundene maximale Element mit C übereinstimmen muss. Was haben Sie damit eigentlich gezeigt?

Aufgabe 3:
Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) $\operatorname{Ext}^i_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) \cong \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{falls } i = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

(ii) $\operatorname{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$

(iii) $\operatorname{Ext}^i_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}[p^{-1}]/\mathbb{Z}) = 0$ für alle $i \geq 0$

Aufgabe 4:
In dieser Aufgabe wollen wir $E = \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ studieren. Zeigen Sie dafür:

(i) E stimmt mit dem Kokern von $\operatorname{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) \to \operatorname{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ überein.

(ii) $\operatorname{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$

bitte wenden

Jun.-Prof. Dr. Holger Kammeyer
M.Sc. Thor Wittich

Topologie II, SoSe 23
Blatt 5

(iii) Der Homomorphismus $\mathbb{Z}_p \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[p^{-1}], \mathbb{Z}[p^{-1}]/\mathbb{Z})$, $(a_n)_{n\geq 1} \mapsto (\frac{b}{p^n} \mapsto \frac{a_n b}{p^n})$ setzt sich zu einem Isomorphismus $\mathbb{Q}_p \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[p^{-1}], \mathbb{Z}[p^{-1}]/\mathbb{Z})$ fort.

(iv) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}[p^{-1}]/\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[p^{-1}], \mathbb{Z}[p^{-1}]/\mathbb{Z}) (\cong \mathbb{Q}_p)$

(v) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \cong \bigoplus_{p \text{ prim}} \mathbb{Z}[p^{-1}]/\mathbb{Z}$

(vi) Ist $A \subset \prod_{p \text{ prim}} \mathbb{Q}_p$ die Untergruppe der Tupel deren Einträge fast alle in $\mathbb{Z}_p$ liegen, so lässt sich E vermöge (i)-(v) mit $A/\mathbb{Q}$ identifizieren.

Bemerkung: Hierbei sind

$$\mathbb{Z}_p = \left\{ (a_n)_{n\geq 1} \in \prod_{n\geq 1} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \mid \text{ für alle } m \geq m' \text{ ist } a_m = a_{m'} \bmod p^m \right\}$$

die ganzen p-adischen Zahlen und $\mathbb{Q}_p = \mathrm{Frac}(\mathbb{Z}_p)$ die p-adischen Zahlen, wobei p eine Primzahl ist.