Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Jun.-Prof. Dr. Holger Kammeyer
M.Sc. Thor Wittich

Topologie II, SoSe 23
Blatt 3

Auf dem gesamten Blatt sind R und S (nicht notwendigerweise kommutative) Ringe.

Aufgabe 1:
Sei R zusätzlich kommutativ. Weisen Sie nach, dass $R[x] \otimes_R R[y]$ durch $R[x, y]$ gegeben ist.

Aufgabe 2:
Wir betrachten eine Gruppe G, einen trivialen $\mathbb{Z}[G]$-Rechtsmodul M und einen trivialen $\mathbb{Z}[G]$-Linksmodul N. Zeigen Sie, dass $M \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N$ nichts Anderes als das gewöhnliche Tensorprodukt $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$ ist.
Bemerkung: Wie auch auf dem letzten Blatt bedeutet trivial hier, dass G vermöge der Multiplikation mit 1 wirkt und man diese Wirkung $\mathbb{Z}$-linear fortsetzt.

Aufgabe 3:

(i) Zeigen Sie, dass Tensorprodukte assoziativ sind, d.h. wenn A ein R-Rechtsmodul, B ein R-S-Bimodul und C ein S-Linksmodul ist, so ist $(A \otimes_R B) \otimes_S C \cong A \otimes_R (B \otimes_S C)$.

(ii) Wir hatten gesehen, dass Tensorprodukte verträglich mit direkten Summen sind:

$$M \otimes_R \Big(\bigoplus_{i\in I} N_i\Big) \cong \bigoplus_{i\in I} (M \otimes_R N_i) \qquad \Big(\bigoplus_{i\in I} M_i\Big) \otimes_R N \cong \bigoplus (M_i \otimes_R N)$$

Was passiert wenn wir die direkten Summen durch Produkte ersetzen?

Aufgabe 4:

(i) Weisen Sie nach, dass der Gruppenring $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}]$ isomorph zu $\mathbb{Z}[x]/(x^n - 1)$ ist.

(ii) Wir betrachten $\mathbb{Z}$ als trivialen $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}]$-Modul. Berechnen Sie die Gruppenhomologie $H_i(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}[\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}]}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$.

(iii) Folgern Sie aus Ihrer Berechnung, dass $H_i(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) = 0$ ist für alle $i \geq 1$.